А.П. Киселев

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ
СТЕРЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

Под редакцией и с дополнениями
проф. Н.А. Глаголева



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2004

УДК 501
ББК 22.151
К 44

Киселев А. П. **Геометрия** / Под ред. Н.А. Глаголева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 328 с. — ISBN 5-9221-0367-9.

В 2002 г. исполнилось 150 лет со дня рождения А.П. Киселева. Его «Элементарная геометрия» вышла в 1892 г.

В наше время книги Киселева стали библиографической редкостью и неизвестны молодым учителям. А между тем дальнейшее совершенствование преподавания математики невозможно без личного знакомства каждого учителя с учебниками, некогда считавшимися эталонными. Именно по этой причине и предпринимается переиздание «Геометрии» Киселева.

ISBN 5-9221-0367-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ОТРЕЗКА И ФИГУРЫ

Глава III. МНОГОГРАННИКИ

Глава IV. КРУГЛЫЕ ТЕЛА

ДОПОЛНЕНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ — ПО ЕВКЛИДУ И ПО КИСЕЛЕВУ

В декабре 2002 г. научная и педагогическая общественность России отметила 150-летие со дня рождения Андрея Петровича Киселева (1852–1940). В центре Орла был установлен бюст выдающегося педагога-математика (он родился в городе Мценске Орловской губернии); в Орловском университете открылся музей отечественного школьного учебника и прошла мемориальная научно-педагогическая конференция. Конференция, посвященная юбилею просветителя, состоялась и в Воронежском университете (в Воронеже А. П. Киселев долгие годы работал).

Среди деятелей отечественного образования А. П. Киселев занимает совершенно особое, можно сказать, уникальное место. Он явился автором исключительно удачных учебников сразу по трем компонентам школьной математики — по арифметике, алгебре и геометрии (ни до, ни после него никто не создавал такой палитры учебников!). Все эти его учебники прожили долгую жизнь с огромной пользой для многих поколений юношества. Но рекордсменом-долгожителем оказался учебник по геометрии.

Истории российских школьных учебников по математике в текущем году исполняется три века, если считать с появившейся в 1703 г. «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Первый учебник специально по геометрии — «Генеральная геометрия» Н. Г. Курганова — увидел свет в 1765 г. В последующие времена создавались все новые и новые учебники по геометрии (как не упомянуть здесь и «Руководство начальной геометрии» нашего выдающегося математика М. В. Остроградского), причем одни из них быстро исчезали из школы, а другие (скажем, учебник А. Ю. Давыдова) просуществовали целые десятилетия.

А. П. Киселев впервые выпустил «Элементарную геометрию» (ч. I, «Планиметрия»; ч. II, «Стереометрия») в 1892 г. Уже в начале XX века этот учебник завоевал широкую популярность и профессиональное признание учителей России. Он регулярно переиздавался и начал постепенно вытеснять конкурирующие учебники геометрии других

авторов (например, в 1916 г. вышло его 25-е издание под названием «Элементарная геометрия. Для средних учебных заведений. С приложением большого количества упражнений и статьи: Главнейшие методы решения геометрических задач на построение»). Такой успех был предопределен тем, что А. П. Киселев обладал исключительным педагогическим даром, глубоко и свободно владел предметом, внимательно изучал новинки методики преподавания, постоянно интересовался новостями науки, имел богатейший многолетний практический опыт работы с учащимися, от издания к изданию неустанно совершенствовал свою книгу, учитывая замечания практикующих учителей.

После 1917 г. наша средняя школа (как и вся отечественная система образования) претерпела многочисленные реформы и эксперименты, но учебники А. П. Киселева продолжали жить и использоваться. В 1938 г. «Геометрия» А. П. Киселева после переработки, выполненной известным математиком и педагогом Н.А.Глаголевым, получила официальное утверждение как стабильный и единственный учебник по геометрии (в двух частях — соответственно для 6–8 и 9–10 классов) советской средней школы (дополнявшийся в учебной работе «Сборником задач по геометрии» Н. А. Рыбкина).

Этот учебник просуществовал без всяких изменений в качестве общепринятого до 1956 г., когда школьная программа по математике претерпела изменения. Появились другие учебники, но они не отличались ни особой новизной, ни большей удачностью изложения и в школе не прижились. Многие учителя предпочитали, как и раньше, учить по «Планиметрии» А. П. Киселева, а его «Стереометрия» продержалась до 1974 г. Довольно трудно точно сказать, сколько всего изданий выдержал учебник А. П. Киселева (тем более, что две его части не всегда выходили в комплекте), но, видимо, их насчитывается много десятков.

Впрочем, и позже, после реформ школьного математического образования в 70-х годах прошлого века, о «Геометрии» А. П. Киселева вспоминали с ностальгией, наблюдая, как растет неприязнь школьников к геометрии, и констатируя, что ее изучение по очередным, но попрежнему неудачным учебникам ведет лишь к катастрофическому падению геометрического образования. Предпринималась даже попытка (СПб.: Специальная литература, 1999) подстроить «Планиметрию» А. П. Киселева «под новую программу» с помощью специальных дополнений, но эта попытка была изначально обречена на провал. Кроме того, книга А. П. Киселева еще выпускалась как пособие для учителей — в том виде, какой она имела до переработки 1938 г. (М.: Просвещение, 1980, 1998), и в виде, идентичном стабильному учебнику, вместе с задачником Н. А. Рыбкина (М.: Дрофа, 1995).

Хотя современная программа средней школы по геометрии «модернизирована» координатами, векторами, преобразованиями, уравнениями простейших линий и др., ее основу составляет классическая элементарная геометрия. Конечно, чтобы глубже познакомиться с ней,

можно изучать русский перевод «Начал» Евклида или штудировать какой-нибудь солидный вузовский учебник. Но книга А. П. Киселева и сегодня остается наиболее удобным, четко и доступно написанным образцом изложения евклидовой геометрии, приспособленным к нуждам школы. Именно поэтому она включена в новую серию «Библиотека физико-математической литературы для школьников и учителей» и, несомненно, будет полезна и творческому учителю (прежде всего — начинающему), и даже интересующемуся ученику.

Дело, однако, не только в желании просто сделать доступным широкому кругу читателей «канонический» учебник, верой и правдой служивший советской школе два десятилетия. Книга А. П. Киселева предоставляет еще и богатую пищу для методических размышлений и поисков. Учителю математики было бы очень полезно проанализировать — с точки зрения нынешних наших представлений об учебнике для школы — такие вопросы, как подбор материала и манера его преподнесения, соотношение между научностью и доступностью изложения, сочетание теории и задач, целесообразность раздельного изучения планиметрии и стереометрии, использование фактов из истории математики, учет возрастной психологии, язык и стиль книги, ее оформление и т. д. Ибо дальнейшее совершенствование геометрического образования в школе и объективная оценка ныне действующих учебников немыслимы без тщательного личного ознакомления с опытом прошлого.

В последнее время явно прослеживается усиление интереса к изучению истории математического образования в России. Достаточно упомянуть здесь два фундаментальных труда по этой проблематике — Ю. М. Колягина «Русская школа и математическое образование. Наша гордость и наша боль» (М.: Просвещение, 2001) и Т. С. Поляковой «История математического образования в России» (Изд-во МГУ, 2002). Но нельзя не обратить внимание на одно обстоятельство: в большинстве проводимых многими авторами исследований ударение делается на слово «история», в центре внимания оказываются чисто фактологические детали летописания. Между тем, важно осуществлять систематическую и целенаправленную работу по той же тематике с ударением на слово «математического», чтобы понять внутреннюю логику и определяющие факторы эволюции содержания преподавания, выбора доказательств и примеров, требований к строгости обоснования, стиля изложения, общих взглядов на учебник и т. д.

Десятки изданий учебника А. П. Киселева, сопутствовавшие им методические материалы, иные учебники и пособия открывают широкие возможности для научного изучения исторической динамики развития методических воззрений на конкретные вопросы преподавания геометрии и создания учебника. Вот лишь один пример: в разных изданиях «Геометрии» А. П. Киселева мы встречаем и «алгебраическое», и «геометрическое» обоснования несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Отметим и такой удивительный факт: из из-

дания в издание в книге повторялось неудачное определение призмы, не адекватное фактически изучаемому геометрическому телу (под это определение подпадает и ромбический додекаэдр).

Жизнь идет вперед, изменяются общественные взгляды, в том числе на цели, содержание и методику преподавания математики новым подрастающим поколениям. Конечно, в буквальном виде «Геометрия» А. П. Киселева сейчас уже не может рассматриваться как учебник для современной российской школы. Но эта книга, благодаря своему исключительному педагогическому потенциалу, не потеряла своей значимости и еще послужит отечественному образованию.

Н. Розов
профессор, декан факультета
педагогического образования МГУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник элементарной геометрии А. П. Киселева был долгое время самым распространенным учебником геометрии. Его главные достоинства — простота и отчетливость языка и доступность для понимания учащимися средних школ.

В порядке переработки учебника и приспособления его к существующим программам средних школ внесены многочисленные изменения и дополнения с целью уточнить, а иногда и более широко осветить отдельные вопросы. В вопросах же принципиального характера мною сделаны в тексте автора изменения по существу. В издаваемой первой части книги (Планиметрия) наиболее важными изменениями являются следующие: при изложении вопроса об измерении отрезков введены бесконечные десятичные дроби; теория подобия поставлена в связь с общей задачей подобного преобразования; дано более строгое изложение вопроса об измерении длины окружности; уточнено и вместе с тем несколько упрощено изложение теории измерения площадей; указано значение отдельных теорем в общем курсе геометрии; даны дополнительные указания к решению некоторых наиболее трудных задач; методы решения задач на построение, данные автором в виде приложения в конце всей книги, размещены с надлежащими редакционными изменениями в соответствующих местах книги (чтобы учащийся мог познакомиться с ними и использовать их в процессе изучения предмета); сокращена часть задач на вычисление, именно: выпущены задачи, имеющие малую теоретическую и практическую ценность; вовсе опущена глава «об отношениях и пропорциях», содержание которой с современной точки зрения является совершенно устарелым.

Кроме того, мною написаны следующие дополнения к первой части книги: 1) о симметрии фигур (осевой и центральной, §§ 37 и 84–86); 2) о подобном преобразовании фигур, перспективном расположении многоугольников и подобии окружностей (§§ 173–178); о пределе числовой последовательности и переменной величины (§§ 227–231).

Во всей переработке учебника я старался дать более точное изложение предмета и более широкое освещение отдельных вопросов, а также выдвинуть на первый план основные геометрические идеи о движении, о симметрии, о подобии, как геометрическом преобразовании, в той мере, в какой это допускают рамки готового текста и самый размер книги. Кроме того, при переработке текста я старался избежать создания в книге разных стилей, что могло бы затруднить чтение книги учащимися.

Н.Глаголев.
г. Верея, 20/11 1938 г.

ВВЕДЕНИЕ

1. Геометрические фигуры. Часть пространства, ограниченная со всех сторон, называется **геометрическим телом**.

Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства **поверхностью**.

Часть поверхности отделяется от смежной части **линией**.

Часть линии отделяется от смежной части **точкой**.

Геометрическое тело, поверхность, линия и точка не существуют раздельно. Однако при помощи отвлечения мы можем рассматривать поверхность независимо от геометрического тела, линию — независимо от поверхности и точку — независимо от линии. При этом поверхность мы должны представить себе не имеющей толщины, линию — не имеющей ни толщины, ни ширины и точку — не имеющей ни длины, ни ширины, ни толщины.

Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется вообще геометрической **фигурой**. Геометрические фигуры могут перемещаться в пространстве, не подвергаясь никаким изменениям. Две геометрические фигуры называются равными, если перемещением одной из них в пространстве ее можно совместить со второй фигурой так, что обе фигуры совместятся во всех своих частях.

2. Геометрия. Наука, рассматривающая свойства геометрических фигур, называется **геометрией**, что в переводе с греческого языка означает **землемерие**. Такое название этой науке было дано потому, что в древнее время главной целью геометрии было измерение расстояний и площадей на земной поверхности.

Плоскость

3. Плоскость. Из различных поверхностей наиболее знакомая нам есть плоская поверхность, или просто п л о с к о с т ь, представление о которой дает нам, например, поверхность хорошего оконного стекла или поверхность спокойной воды в пруде и т. п.

Укажем следующее свойство плоскости: ***Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место этой или другой плоскости, причем накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной.***

Прямая линия

4. Прямая линия. Самой простой линией является прямая. Представление о прямой линии, или просто о прямой, всем хорошо знакомо. Представление о ней дает туго натянутая нить или луч света, выходящий из малого отверстия. С этим представлением согласуется следующее основное свойство прямой:

Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.

Из этого свойства следует:

Если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые сливаются и во всех остальных точках (потому что в противном случае через две точки можно было бы провести две различные прямые, что невозможно).

По той же причине ***две прямые могут пересечься только в одной точке.***

Прямая линия может лежать на плоскости. При этом плоскость обладает следующим свойством:

Если на плоскости взять какие-нибудь две точки и провести через них прямую линию, то все точки этой прямой будут находиться в этой плоскости.

A a B

Рис. 1

C b D

Рис. 2

5. Неограниченная прямая; луч; отрезок. Если прямую представляют продолженной в обе стороны бесконечно, то ее называют **бесконечной** (или **неограниченной**) прямой.

Прямую обозначают обыкновенно двумя большими буквами, поставленными у двух каких-либо ее точек. Так, говорят: «прямая AB» или «BA» (рис. 1).

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется **отрезком прямой**; отрезок обыкновенно обозначается двумя буквами, поставленными у его концов (отрезок CD, рис. 2). Иногда прямую или отрезок прямой обозначают и одной буквой (малой); например, говорят: «прямая a, отрезок b» и т. п.

A

Рис. 3

Для краткости вместо «отрезок прямой» мы будем часто говорить просто «отрезок».

Иногда рассматривают прямую, ограниченную только с одной стороны, например в точке A (рис. 3). О такой прямой говорят, что она исходит из точки A; ее называют **лучом** (или **полупрямой**).

6. Равенство и неравенство отрезков. ***Два отрезка равны, если они могут быть наложены один на другой так, что их концы совпадут.*** Положим, например, что мы накладываем отрезок AB на

Рис. 4

отрезок CD (рис. 4) так, чтобы точка A совпала с точкой C и чтобы прямая AB пошла по прямой CD, если при этом концы B и D совпадут, то отрезки AB и CD равны; в противном случае отрезки будут не равны, причем меньшим считается тот, который составит часть другого.

Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрезок, равный данному отрезку, употребляют **циркуль** — прибор, известный учащимся из опыта.

7. Сумма отрезков. Суммой нескольких данных отрезков AB, CD, $EF, \dots$ (рис. 5) называется такой отрезок, который получится следующим образом. На какой-нибудь прямой берем произвольную

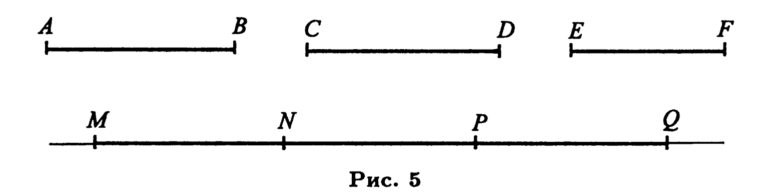


Рис. 5

точку M и откладываем от нее отрезок MN, равный AB, затем от точки N в том же направлении откладываем отрезок NP, равный CD, и отрезок PQ, равный EP. Тогда отрезок MQ и будет суммой отрезков AB, CD и EF (которые по отношению к этой сумме называются слагаемыми). Подобным образом можно получить сумму какого угодно числа отрезков.

Сумма отрезков обладает всеми свойствами суммы чисел; так, она не зависит от порядка слагаемых (переместительный закон) и не изменяется, если некоторые слагаемые будут заменены их суммой (сочетательный закон). Так:

$$AB + CD + EF = AB + EF + CD = EF + CD + AB = \dots$$

и

$$AB + CD + EF = AB + (CD + EF) = CD + (AB + EF) = \dots .$$

8. Действия над отрезками. Из понятия о сумме выводятся понятия о разности отрезков, умножении и делении отрезков на отвлеченное число. Так, разность отрезков AB и CD (если $AB > CD$) есть такой третий отрезок, сумма которого с CD равна AB; произведение отрезка AB на число 3 есть сумма трех отрезков, из которых каждый равен AB; частное от деления отрезка AB на число 3 есть третья часть AB и т. п.

Если данные отрезки измерены какой-нибудь линейной единицей (например, сантиметром), и длины их выражены соответствующими числами, то длина суммы отрезков выразится суммой чисел, измеряющих эти отрезки, разность выразится разностью чисел и т. д.

Понятие об окружности

9. Окружность. Если дадим циркулю произвольный раствор и, поставив одну его ножку острием в какую-нибудь точку O плоскости (рис. 6), станем вращать циркуль вокруг этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашом или пером, прикасающимся к плоскости, опишет на плоскости непрерывную линию, все точки которой одинаково удалены от точки O. Эта линия называется **окружностью**, и точка O — **центром** ее. Отрезки OA, OB, $OC, \ldots$, соединяющие центр с какими-нибудь точками окружности, называются **радиусами**. Все радиусы одной окружности равны между собой.

Окружности, описанные одинаковыми радиусами, равны, так как они при совмещении их центров совмещаются всеми своими точками. Прямая (MN, рис. 6), проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется **секущей**.

Отрезок прямой (EP), соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется **хордой**.

Всякая хорда (AD), проходящая через центр, называется **диаметром**. Диаметр равен сумме двух радиусов, и потому все диаметры одной окружности равны между собой. Какая-нибудь часть окружности (например, EmP) называется **дугой**.

О хорде (EF), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорят, что она **стягивает** эту дугу.

Дуга обозначается иногда знаком $\smile$; например, пишут: $\smile EmP$. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом***).

Часть круга, заключенная между двумя радиусами (часть COB, покрытая штрихами на рис. 6), называется **сектором**, а часть, отсекаемая от круга какой-нибудь секущей (часть EmF), называется **сегментом**.

---

*)Иногда слово «круг» употребляют в том же смысле, как и окружность. Но этого следует избегать, так как употребление одного и того же термина для разных понятий может приводить к ошибкам.

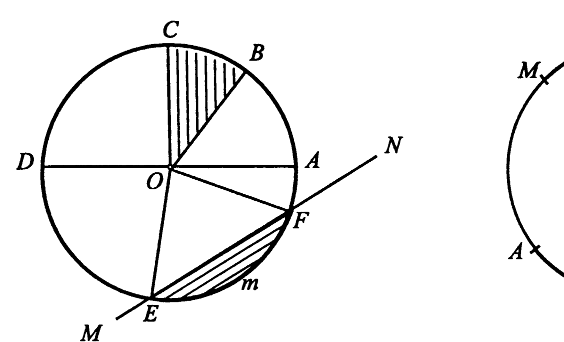


Рис. 6

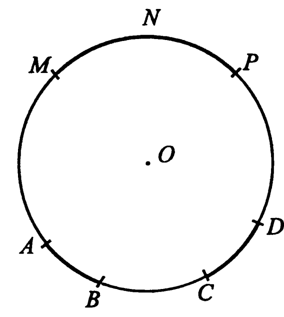


Рис. 7

10. Равенство и неравенство дуг. Две дуги одной и той же окружности (или равных окружностей) равны между собой, если они могут быть совмещены так, что их концы совпадут. Положим, например, что мы накладываем дугу AB (рис. 7) на дугу CD так, чтобы точка A совпала с точкой C и дуга AB пошла по дуге CD; если при этом концы B и D совпадут, то совпадут и все промежуточные точки этих дуг, так как они находятся на одинаковом расстоянии от центра, значит, $\smile AB = \smile CD$; если же B и D не совпадут, то дуги не равны, причем та считается меньше, которая составит часть другой.

11. Сумма дуг. Суммой нескольких данных дуг одинакового радиуса называется такая дуга того же радиуса, которая составлена из частей, соответственно равных данным дугам. Так, если от произвольной точки M (рис. 7) окружности отложим часть MN, равную AB, и затем от точки N в том же направлении отложим часть NP, равную CD, то дуга MP будет суммой дуг AB и CD. Подобно этому можно составить сумму трех и более дуг.

При сложении дуг одинакового радиуса их сумма может не уместиться на одной окружности, одна из дуг может частично покрыть другую. В таком случае суммой дуг будет являться дуга, большая целой окружности. Так, например, при сложении дуги AmB с дугой CnD (рис. 8) получаем дугу, состоящую из целой окружности и дуги AD.

Сумма дуг, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами **переместительным** и **сочетательным**.

Из понятия о сумме дуг выводятся понятия о разности дуг, умножении и делении дуги на отвлеченное число, так же как и для отрезков прямых.

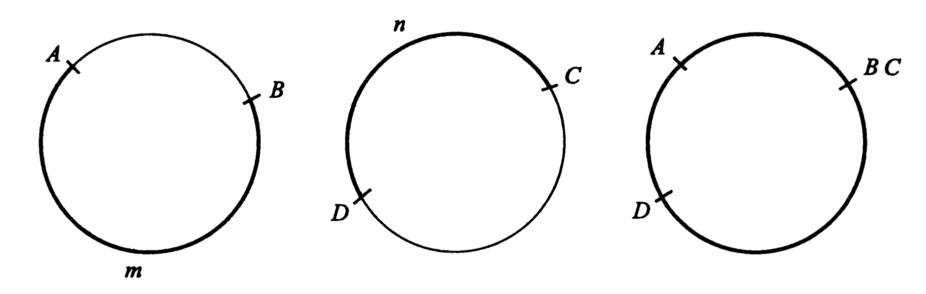


Рис. 8

12. Разделение геометрии. Геометрия разделяется на две части: **планиметрию** и **стереометрию**. Первая рассматривает свойства таких фигур, все части которых помещаются на одной плоскости; вторая — свойства таких фигур, у которых не все части помещаются на одной плоскости.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Глава I

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

1. УГЛЫ

Предварительные понятия

13. Угол. Фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки, называется **углом**. Полупрямые, образующие угол, называются **сторонами**, а точка, из которой они исходят, — **вершиной угла**. Стороны следует представлять себе неограниченно продолженными от вершины.

Угол обыкновенно обозначается тремя большими буквами, из которых средняя ставится у вершины, а крайние — у каких-нибудь точек сторон; например, говорят: «угол AOB» или «угол BOA» (рис. 9). Но можно обозначить угол и одной буквой, поставленной у вершины, если при этой вершине нет других углов. Мы иногда будем обозначать угол цифрой, поставленной внутри угла около вершины.

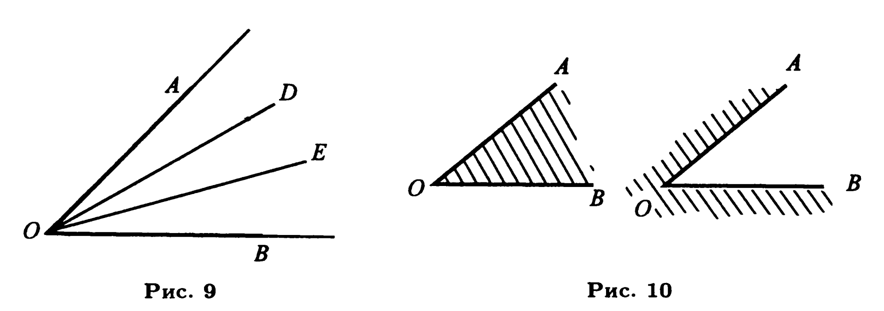


Рис. 9 **Рис. 10**

Стороны угла разделяют всю плоскость, в которой лежит этот угол, на две области. Одна из них называется **внутренней областью угла**, другая — **внешней его областью**. Обычно внутренней областью считается та, в которой целиком помещается отрезок прямой,

соединяющей две любые точки, взятые на сторонах угла, например точки A и B на сторонах угла AOB (рис. 9). Но иногда приходится считать внутренней областью угла другую часть плоскости. В этих случаях обычно делается специальное указание, какая область плоскости считается внутренней областью угла.

На рис. 10 представлены раздельно оба случая. Внутренней областью угла в каждом случае служит заштрихованная часть плоскости. Если из вершины угла (рис. 9) проведем внутри него какие-нибудь прямые OD, $OE, \ldots$, то образовавшиеся при этом углы AOD, DOE, $EOB, \ldots$, рассматриваются как части угла AOB.

Слово «угол» при записи заменяется часто знаком $\angle$.

Например, вместо «угол AOB» обычно пишут: $\angle AOB$.

14. Равенство и неравенство углов. В соответствии с общим определением равенства геометрических фигур (§ 1) *два угла считаются равными, если при наложении они могут совместиться.*

Положим, например, что мы накладываем угол AOB на угол $A_1O_1B_1$ (рис. 11) так, чтобы вершина O совпала с O_1, сторона OB пошла по O_1B_1 и чтобы внутренние области обоих углов были расположены по одну сторону от прямой O_1B_1. Если при этом сторона OA совместится с O_1A_1, то углы равны; если же OA пойдет внутри угла O_1B_1 или же вне его, то углы не равны, причем тот из них будет меньше, который составит часть другого угла.

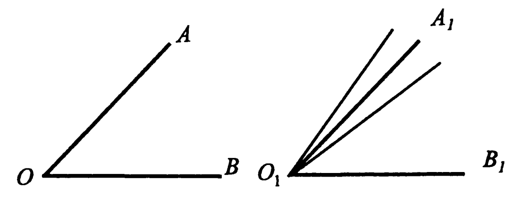


Рис. 11

15. Сумма углов. Суммой углов AOB и $A_1O_1B_1$ (рис. 12) называется такой угол, который получится следующим образом. Строим

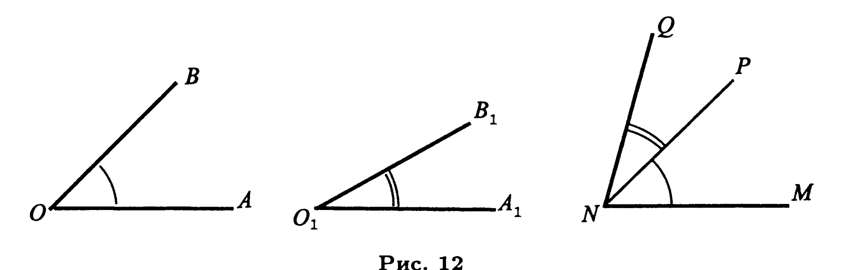


Рис. 12

угол MNP, равный первому данному углу AOB, и к нему пристраиваем угол PNQ, равный другому данному углу $A_1O_1B_1$ так, чтобы у обоих углов оказалась общая вершина N и общая сторона NP и чтобы внутренние области углов были расположены по разные

стороны от общей стороны NP. Тогда угол MNQ называется суммой углов AOB и $A_1O_1B_1$. Внутренней областью этого угла служит та область плоскости, которая образована совокупностью внутренних областей складываемых углов. Это та область, в которой лежит общая сторона (NP) складываемых углов. Подобным образом может быть составлена сумма трех и более углов.

Сумма углов, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами переместительным и сочетательным. Часто приходится говорить о такой полупрямой, которая делит данный угол пополам; такой полупрямой дали особое название: **биссектриса** (или **равноделящая**) (рис. 13).

16. Расширение понятия об угле. При нахождении суммы углов могут представиться некоторые особые случаи, которые полезно рассмотреть отдельно.

1. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например трех: AOB, BOC и COD (рис. 14), сторона OD угла COD составит продолжение стороны OA угла AOB. Мы получим тогда фигуру, образованную двумя полупрямыми (OA и OD), исходящими из одной точки (O) и составляющими продолжение одна другой. Такую фигуру принято тоже называть углом (**развернутым**, или **выпрямленным**).

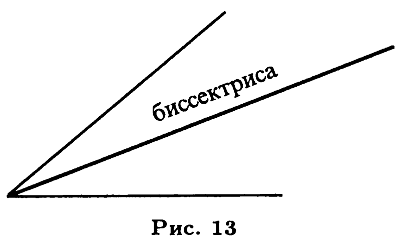


Рис. 13

2. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например пяти углов: AOB, BOC, COD DOE и EOA (рис. 15), сторона OA угла EOA совместится со стороной OA угла AOB.

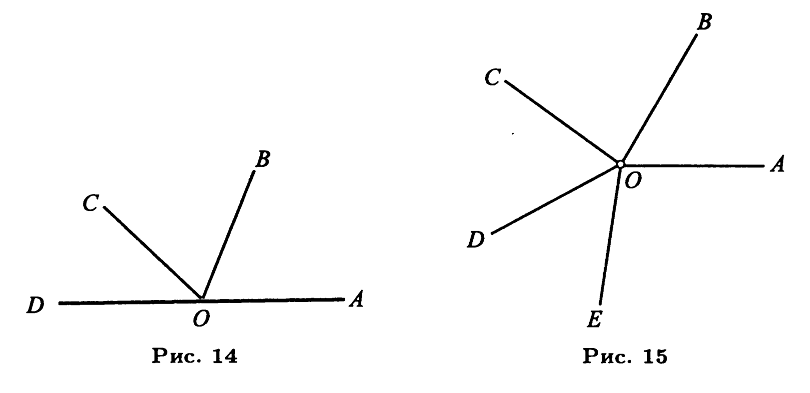


Рис. 14 Рис. 15

Фигура, образованная такими совпавшими полупрямыми (рассматриваемая вместе со всей плоскостью, расположенной вокруг общей вершины O), также называется углом (**полным**).

3. Наконец, может случиться, что, строя сумму углов, мы не только заполним всю плоскость вокруг их общей вершины, но даже будем вынуждены налагать углы один на другой, покрывая плоскость вокруг общей вершины во второй раз, в третий раз и т. д. Такая сумма углов равна одному полному углу, сложенному с некоторым углом, или равна двум полным углам, сложенным с некоторым углом, и т. д.

Измерение углов

17. Центральный угол. Угол (AOB, рис. 16), образованный двумя радиусами окружности, называется центральным углом; о таком угле и дуге, заключенной между его сторонами, говорят, что они **соответствуют** друг другу.

Центральные углы по отношению к соответствующим им дугам обладают следующими двумя свойствами.

В одном круге или в равных кругах:

1) ***Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.***

2) Обратно. ***Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.***

Пусть $\angle AOB = \angle COD$ (рис. 17), покажем, что дуги AB и CD также равны. Вообразим, что сектор AOB мы повернули вокруг центра O в направлении, указанном стрелкой, настолько, чтобы радиус OA совпал с OC. Тогда, вследствие равенства углов, радиус OB совместится с OD: значит, совместятся и дуги AB и CD, т. е. они будут равны.

Второе свойство также легко обнаружить наложением.

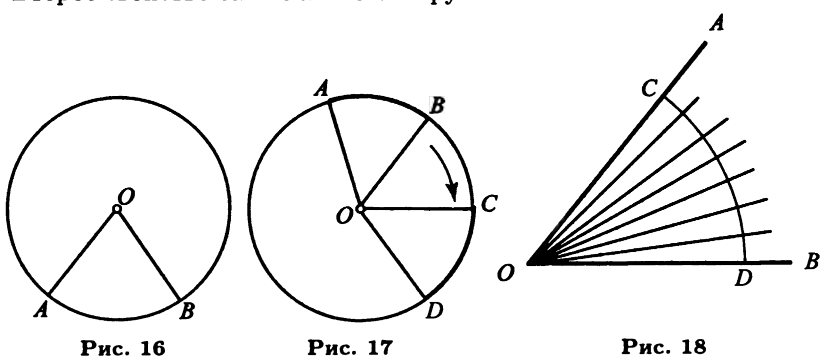


Рис. 16 Рис. 17 Рис. 18

18. Градусы дуговой и угловой. Вообразим, что какая-нибудь окружность разделена на 360 равных частей и ко всем точкам деления проведены радиусы. Тогда вокруг центра образуются 360 центральных углов, которые, как соответствующие равным дугам, должны быть равны между собой. Каждая из полученных таким образом на окружности дуг называется **дуговым градусом**, а каждый из

образовавшихся при центре углов называется **угловым градусом**. Значит, можно сказать, что дуговой градус есть $1/360$ часть окружности, а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуговому градусу.

Градусы (дуговые и угловые) подразделяются еще на 60 равных частей, называемых **минутами**, а минуты подразделяются еще на 60 равных частей, называемых **секундами***).

19. Соответствие между центральными углами и дугами. Пусть AOB есть какой-нибудь угол (рис. 18). Опишем между его сторонами с центром в вершине O дугу CD произвольного радиуса; тогда угол AOB будет центральным углом, соответствующим дуге CD.

Положим, например, что в этой дуге содержится 7 дуговых градусов (на чертеже градусы изображены в увеличенном размере). Тогда, если соединим точки деления с центром, угол AOB разделится, очевидно, на 7 угловых градусов. Вообще можно сказать, что *угол измеряется соответствующей ему дугой*, разумея под этим, что в угле содержится столько угловых градусов, минут и секунд, сколько в соответствующей ему дуге содержится дуговых градусов, минут и секунд. Если, например, в дуге CD содержится 20 градусов 10 минут 15 секунд дуговых, то и в угле AOB заключается 20 градусов 10 минут 15 секунд угловых, что принято сокращенно выражать так: $\angle AOB = 20°10'15''$ обозначая знаками $°$, $'$ и $''$ соответственно градусы, минуты и секунды.

Величина углового градуса не зависит от радиуса окружности. Действительно, если сложить по правилу, указанному в § 15, 360 угловых градусов, то получим полный угол при центре окружности. Каков бы ни был радиус окружности, этот полный угол будет один и тот же. Значит, можно сказать, что угловой градус составляет $1/360$ часть полного угла. Это мера угла, вполне определяющая его величину независимо от радиуса окружности. Число

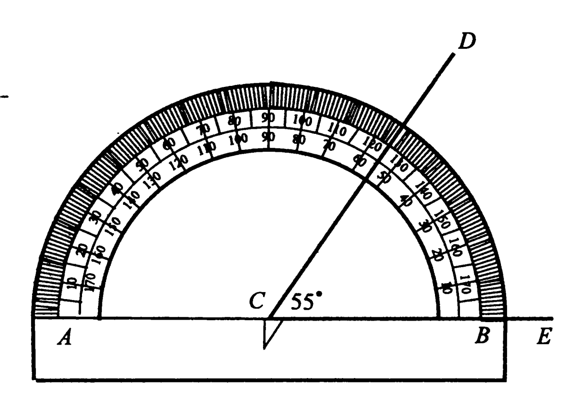


Рис. 19

*)Употребительна также сотенная система мер углов и дуг; по этой системе за **град** дуги принимают $1/100$ четверти окружности, минуту принимают равной $1/100$ града, секунду — $1/100$ минуты.

угловых градусов в данном угле принимают за меру наклона одной стороны угла к другой.

20. Транспортир. Для измерения углов употребляется особый прибор — **транспортир**. Этот прибор (рис. 19) представляет собой полукруг, дуга которого разделена на 180°. Чтобы измерить угол DCE, накладывают на него прибор так, чтобы центр полукруга совпадал с вершиной угла, а радиус CB был расположен по стороне CE. Тогда число градусов, содержащееся в дуге, заключенной между сторонами угла DCE, покажет величину его. При помощи транспортира можно также начертить угол, содержащий данное число градусов.

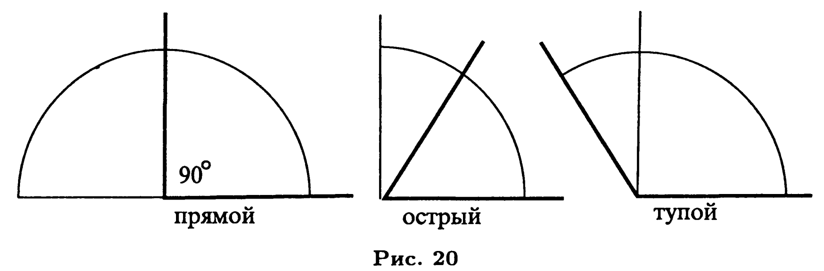


Рис. 20

21. Прямой, острый и тупой углы. Угол в 90° (составляющий, следовательно, половину развернутого угла или четверть полного угла) называют **прямым** углом; угол, меньший прямого, называют **острым**, а угол, больший прямого, но меньший развернутого, называют **тупым** (рис. 20)

Конечно, **все прямые углы**, как содержащие одинаковое число градусов, **равны между собой**.

Величину прямого угла иногда обозначают буквой d (начальная буква французского слова (*droit*, что значит «прямой»).

Смежные и вертикальные углы

22. Смежные углы и их свойства. Два угла (AOB и BOC, рис. 21) называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют продолжение одна другой.

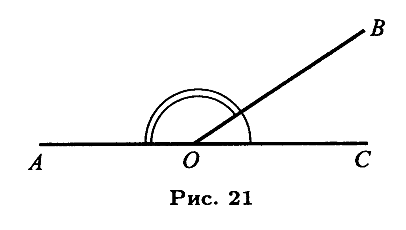


Рис. 21

Так как такие углы в сумме составляют развернутый угол, то ***сумма двух смежных углов равна 180°*** (другими словами, она равна сумме двух прямых углов).

Для каждого данного угла можно построить два смежных с ним угла. Например, для угла AOB (рис. 22), продолжив сторону AO, мы получим один смежный угол AOD. *Два угла, BOC и AOD, смежные с одним и тем же углом AOB, равны между собой*, так

как каждый из них дополняет угол AOB до $180°$. Если угол АОВ прямой (рис. 23), т. е. если он содержит $90°$, то и каждый из смежных с ним углов COB и AOD должен быть также прямой, так как он содержит в себе $180° - 90°$, т. е. $90°$; четвертый угол COD тоже должен быть прямым, так как три угла AOB, BOC и AOD составляют в сумме $270°$ и, следовательно, от $360°$ на долю четвертого угла COD остается тоже $90°$. Таким образом: *если при пересечении двух прямых* (AC и BD, рис. 23) *один из четырех углов окажется прямой, то и остальные три угла должны быть прямые.*

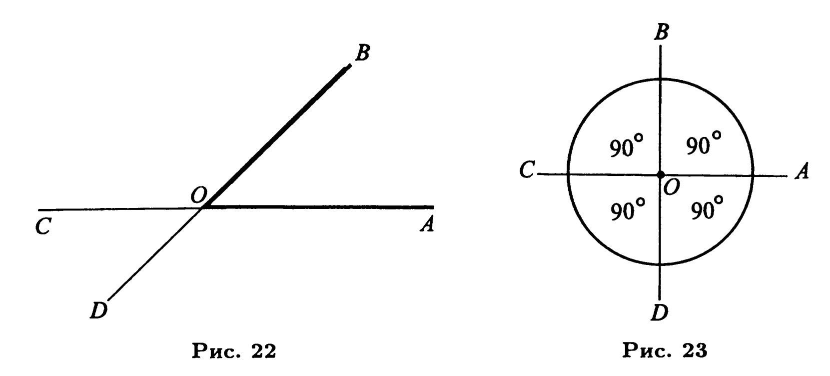


Рис. 22 Рис. 23

23. Перпендикуляр и наклонная. Общая сторона (OB) двух смежных углов называется **наклонной** к прямой (AC), на которой лежат две другие стороны, в том случае, когда смежные углы не равны между собой (рис. 24); в том же случае, когда смежные углы равны (рис. 25) и когда, следовательно, каждый из углов есть прямой, общая сторона называется **перпендикуляром** к прямой, на которой лежат две другие стороны. Общая вершина (O) в первом случае называется **основанием наклонной**, во втором случае — **основанием перпендикуляра**.

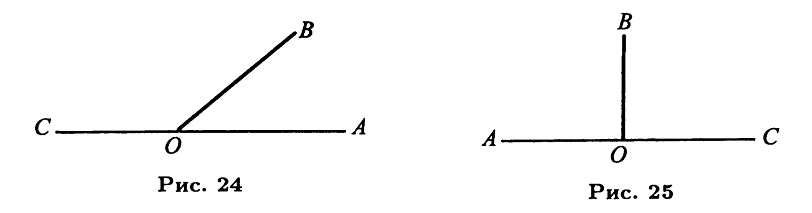


Рис. 24 Рис. 25

Две прямые (AC и BD, рис. 23), пересекающиеся между собой под прямым углом, называются **взаимно перпендикулярными**. Что прямая AC перпендикулярна к прямой BD, записывают так: $AC \perp BD$.

Замечания. 1) Если перпендикуляр к прямой AC (рис. 25) приходится проводить из точки O, лежащей на этой прямой, то говорят, что этот перпендикуляр надо «восставить» к прямой AC, а если требуется перпендикуляр провести из точки B, лежащей вне прямой, то говорят, что его надо «опустить» на прямую (все равно: вниз или вверх, или вбок).

2) Очевидно, что из всякой точки данной прямой можно к этой прямой восставить перпендикуляр и притом только один.

24. Докажем, что ***из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.***

Пусть дана какая-нибудь прямая AB (рис. 26) и вне ее произвольная точка M; требуется показать, что, во-первых, из этой точки можно опустить на прямую AB перпендикуляр и, во-вторых, что этот перпендикуляр может быть только один.

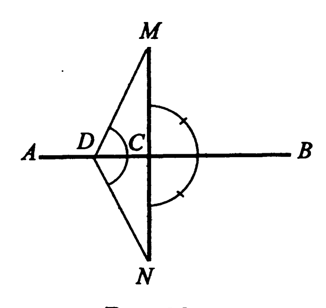


Рис. 26

Вообразим, что мы перегнули чертеж по прямой AB так, чтобы верхняя его часть упала на нижнюю. Тогда точка M займет некоторое положение N. Отметив это положение, приведем чертеж в прежний вид и затем соединим точки M и N прямой. Теперь убедимся, что полученная прямая MN перпендикулярна к AB, а всякая иная прямая, исходящая из M, например MD, не перпендикулярна к AB. Для этого перегнем чертеж вторично. Тогда точка M снова совместится с N, а точки C и D останутся на своих местах; следовательно, прямая MC совпадет с NC, а MD с ND. Из этого следует, что $\angle MCB = \angle BCN$ и $\angle MDC = \angle CDN$.

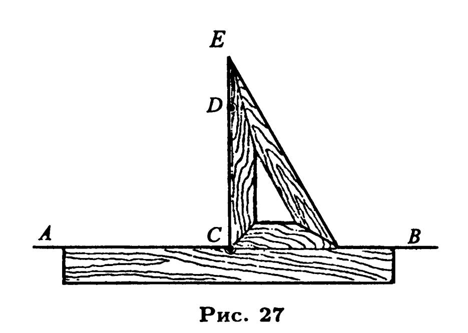


Рис. 27

Но углы MCB и BCN смежные и, как теперь видим, равные; следовательно, каждый из них есть прямой, а потому $MN \perp AB$. Так как линия MDN не прямая (потому что не может быть двух различных прямых, соединяющих точки M и N), то сумма двух равных углов MDC и CDN не равна $2d$; поэтому угол MDC не есть прямой, и, значит, MD не перпендикулярна к AB. Таким образом, другого перпендикуляра из точки M на прямую AB опустить нельзя.

25. Чертежный треугольник. Для построения перпендикуляра к данной прямой очень удобен чертежный треугольник, у которого один из углов делается прямым. Чтобы провести перпендикуляр к прямой AB (рис. 27) через точку C, лежащую на этой прямой, или через точку D, взятую вне прямой, приставляют линейку к прямой AB, к линейке треугольник, а затем, придерживая линейку рукой, двигают треугольник вдоль линейки до тех пор, пока другая сторона прямого угла не пройдет через точку C или D, затем проводят прямую CE.

26. Вертикальные углы и их свойство. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного составляют продолжение сторон другого. Так, при пересечении двух прямых AB и CD (рис. 28) образуются две пары вертикальных углов: AOD и COB, AOC и DOB (и четыре пары смежных углов).

Два вертикальных угла равны между собой (например, $\angle AOD = \angle BOC$), так как каждый из них есть смежный с одним и тем же углом (с $\angle DOB$ или с $\angle AOC$), а такие углы, как мы видели (§ 22), равны друг другу.

27. Замечания об углах, имеющих общую вершину. Об углах, имеющих общую вершину, полезно помнить следующие простые истины:

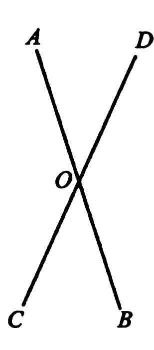


Рис. 28

1) *Если сумма нескольких углов* (AOB, BOC, COD, DOE, рис. 29), *имеющих общую вершину, составляет развернутый угол, то она равна 2d, т. е.* 180° .

2) *Если сумма нескольких углов* (AOB, BOC, COD, DOE, рис. 30), *имеющих общую вершину, составляет полный угол, то она равна* 4d, т. е. 360° .

3) *Если два угла* (AOB и BOC, рис. 24) *имеют общую вершину* (O) *и общую сторону* (OB) *и в сумме составляют* 2d (т. е. 180°), *то их две другие стороны* (AO и OC) *составляют продолжение одна другой* (т. е. такие углы будут смежными).

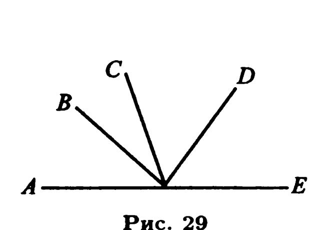


Рис. 29

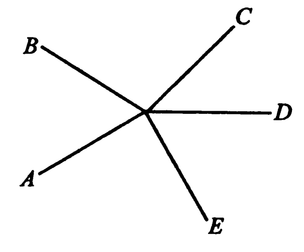


Рис. 30

УПРАЖНЕНИЯ

1. Некоторый угол равен $38^\circ\ 20'$; найти величину смежного с ним угла.

2. Два угла ABC и CBD, имея общую вершину B и общую сторону BC, расположены так, что они не покрывают друг друга; угол $ABC = 100^\circ\ 20'$, а угол $CBD = 79^\circ\ 40'$. Составляют ли стороны AB и BD прямую или ломаную?

3. Построить какой-нибудь угол и при помощи транспортира и линейки провести его биссектрису.

Доказать, что:

4. Биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.

5. Биссектрисы двух вертикальных углов составляют продолжение одна другой.

6. Если при точке O прямой AB (рис. 28) построим по разные стороны от AB равные углы AOD и BOC, то стороны их OD и OC составляют одну прямую.

7. Если из точки O (рис. 28) проведем полупрямые OA, OD, OB, OC так, что $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle AOD = \angle COB$, то OB есть продолжение OA и OD есть продолжение OC.

Указание. Надо применить § 27, 2 и 3.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

28. Теоремы, аксиомы, определения. Из того, что было изложено, можно заключить, что некоторые геометрические истины мы считаем вполне очевидными (например, свойства плоскости и прямой в §§ 3 и 4), а другие устанавливаем путем рассуждений (например, свойства смежных углов в § 22 и вертикальных в § 26). Такие рассуждения являются в геометрии главным средством обнаружить свойства геометрических фигур. Поэтому для дальнейшего полезно заранее познакомиться с теми видами рассуждений, которые применяются в геометрии. Все истины, которые устанавливаются в геометрии, выражаются в виде предложений.

Эти предложения бывают следующих видов.

Определения. Определениями называют предложения, в которых разъясняется, какой смысл придают тому или другому названию или выражению. Например, мы уже встречали определения центрального угла, прямого угла, перпендикуляра и проч.

Аксиомы. Аксиомами называют истины, которые принимаются без доказательства. Таковы, например, предложения, встречавшиеся нам ранее (§ 4): через всякие две точки можно провести прямую и притом только одну; если две точки прямой лежат в данной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.

Укажем еще следующие аксиомы, относящиеся ко всякого рода величинам:

если две величины равны порознь одной и той же третьей величине, то они равны и между собой;

если к равным величинам прибавим поровну или от равных величин отнимем поровну, то равенство не нарушится;

если к неравным величинам прибавим поровну или от неравных величин отнимем поровну, то смысл неравенства не изменится, т. е. большая величина останется большей.

Теоремы. Теоремами называются предложения, истинность которых обнаруживается только после некоторого рассуждения (доказательства). Примером могут служить следующие предложения:

если в одном круге или в равных кругах центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны;

если при пересечении двух прямых между собой один из четырех углов окажется прямой, то и остальные три угла прямые.

Следствия. Следствиями называются предложения, которые составляют непосредственный вывод из аксиомы или из теоремы. Например, из аксиомы: «через две точки можно провести только одну прямую» следует, что «две прямые могут пересечься только в одной точке».

29. Состав теоремы. Во всякой теореме можно различить две части: условие и заключение. **Условие** выражает то, что предполагается данным; **заключение** — то, что требуется доказать. Например, в теореме: «если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны» условием служит первая часть теоремы: «если центральные углы равны», а заключением — вторая часть: «то и соответствующие им дуги равны»; другими словами, нам дано (нам известно), что центральные углы равны, а требуется доказать, что при этом условии и соответствующие дуги также равны.

Условие и заключение теоремы могут иногда состоять из нескольких отдельных условий и заключений; например, в теореме: «если число делится на 2 и на 3, то оно разделится и на 6» условие состоит из двух частей: «если число делится на 2» и «если число делится на 3».

Полезно заметить, что всякую теорему можно подробно выразить словами так, что ее условие будет начинаться словом «если», а заключение — словом «то». Например, теорему: «вертикальные углы равны» можно подробнее высказать так: «если два угла вертикальные, то они равны».

30. Обратная теорема. Теоремой, обратной данной теореме, называется такая, в которой условием поставлено заключение (или часть заключения), а заключением — условие (или часть условия) данной теоремы. Например, следующие две теоремы обратны друг другу:

Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.

Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.

Если одну из этих теорем назовем **прямой**, то другую следует назвать обратной. В этом примере обе теоремы, и прямая, и обратная, оказываются верными. Но так бывает не всегда. Например, теорема: «если два угла вертикальные, то они равны» верна, но обратное предложение: «если два угла равны, то они вертикальные» неверно.

В самом деле, допустим, что в каком-либо углу проведена его биссектриса (рис. 13). Она разделит данный угол на два меньших угла. Эти углы будут равны между собой, но они не будут вертикальными.

31. Противоположная теорема. Теоремой, противоположной данной теореме, называется такая, условие и заключение которой представляют отрицание условия и заключения данной теоремы. Например, теореме: «если сумма цифр делится на 9, то число делится на 9» соответствует такая противоположная: «если сумма цифр не делится на 9, то число не делится на 9».

И здесь должно заметить, что верность прямой теоремы еще не служит доказательством верности противоположной: например, противоположное предложение: «если каждое слагаемое не делится на одно и то же число, то и сумма не разделится на это число» — неверно, тогда как прямое предложение верно.

32. Зависимость между теоремами: прямой, обратной и противоположной. Для лучшего уяснения этой зависимости выразим теоремы сокращенно так (буквой A мы обозначим условие теоремы, а буквой B — ее заключение):

1) **Прямая**: если есть A, то есть и B.

2) **Обратная**: если есть B, то есть и A.

3) **Противоположная прямой**: если нет A, то нет и B.

4) **Противоположная обратной**: если нет B, то нет и A. Рассматривая эти предложения, легко заметить, что первое из них находится в таком же отношении к четвертому, как второе к третьему, а именно: предложения первое и четвертое обратимы одно в другое, равно как второе и третье. Действительно, из предложения: «если есть A, то есть и B» непосредственно следует: «если нет B, то нет и A» (так как если бы A было, то, согласно первому предложению, было бы и B); обратно, из предложения: «если нет B, то нет и A» выводим: «если есть A, то есть и B» (так как если бы B не было, то не было бы и A). Совершенно так же убедимся, что из второго предложения следует третье, и наоборот.

Таким образом, чтобы иметь уверенность в справедливости всех четырех теорем, нет надобности доказывать каждую из них отдельно, а достаточно ограничиться доказательством только двух: прямой и обратной, или прямой и противоположной.

3. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Понятие о многоугольнике и треугольнике

33. Ломаная линия. Линия, образуемая отрезками прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что конец первого служит началом второго, конец второго — началом третьего и т. д., называется **ломаной линией** (рис. 31 и 32). Эти отрезки называются сторонами ломаной, а вершины углов, образуемых соседними отрезками, — **вершинами** ее. Ломаная линия обозначается рядом букв, поставленных у ее вершин и концов; например говорят: ломаная $ABCDE$. Ломаная линия называется **выпуклой**, если она вся расположена по одну сторону от каждого входящего в ее состав отрезка, продолженного неограниченно в обе стороны. Такова, например, линия, изображенная на рис. 31, тогда как ломаная на рис. 32 не будет выпуклой (она расположена не по одну сторону от прямой BC), рис. 31.

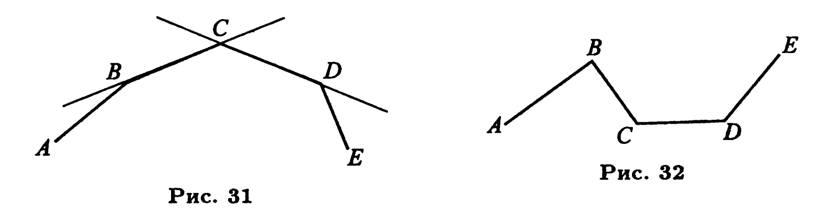


Рис. 31

Рис. 32

Когда концы ломаной сходятся в одну точку, то она называется замкнутой (например, линия $ABCDE$ на рис. 33).

34. Многоугольник. Фигура, образованная замкнутой ломаной линией вместе с частью плоскости, ограниченной этой линией, называется многоугольником (рис. 33). Стороны этой ломаной называются **сторонами** многоугольника, углы, составленные каждыми двумя соседними сторонами, — **углами** многоугольника, а их вершины — **вершинами** его.

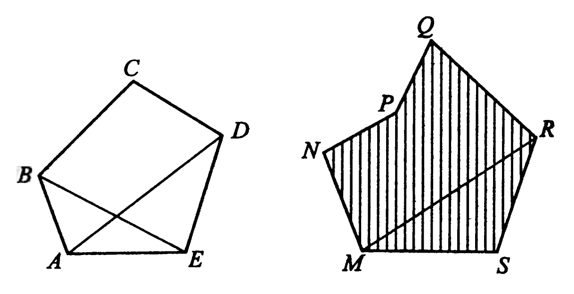


Рис. 33

При этом внутренней областью угла многоугольника считается (рис. 33) та, к которой принадлежит непосредственно примыкающая к вершине внутренняя область самого многоугольника. Так, для многоугольника $MNPQRS$ (рис. 33) углом при вершине P является угол, больший двух прямых (с заштрихованной внутренней областью). Сама ломаная линия, ограничивающая многоугольник, называется **контуром** его, а отрезок, равный сумме всех его сторон, — **периметром**.

Многоугольник называется **выпуклым**, если он ограничен выпуклой ломаной линией; таков, например, многоугольник $ABCDE$, изображенный на рис. 33 (многоугольник $MNPQRS$ нельзя назвать выпуклым); мы будем рассматривать, главным образом, выпуклые многоугольники.

Всякая прямая (как AD, BE, $MR, \ldots$, рис. 33), которая соединяет вершины двух углов многоугольника, не прилежащих к одной стороне, называется **диагональю** многоугольника.

Наименьшее число сторон в многоугольнике — три. По числу сторон многоугольник называется треугольником, четырехугольником, пятиугольником и т. д.

Для краткости «треугольник» обозначается символом $\triangle$.

35. Разделение треугольников. Треугольники разделяются по сравнительной длине их сторон или по величине их углов. Относительно длины сторон они бывают: **разносторонние** (рис. 34), когда все стороны различной длины, и **равнобедренные** (рис. 35), когда две стороны одинаковы; в частности, равнобедренный треугольник называется **равносторонним** (рис. 36), когда все три его стороны равны между собой.

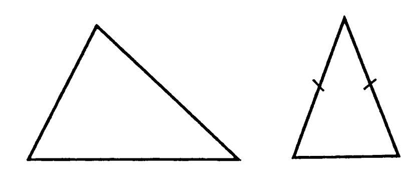


Рис. 34 Рис. 35

Относительно величины углов треугольники бывают: **остроугольные** (рис. 34), когда все углы острые, **прямоугольные** (рис. 37), когда в числе углов есть прямой, и **тупоугольные** (рис. 38), когда в числе углов есть тупой.

В прямоугольном треугольнике стороны, образующие прямой угол, называются **катетами**, а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой**.

36. Главнейшие линии в треугольнике. Одну из сторон треугольника иногда называют **основанием**, тогда вершину противоположного угла называют **вершиной** треугольника, а перпендикуляр, опущенный из вершины на основание или на его продолжение, — **высотой** его.

Так, если в $\triangle ABC$ (рис. 39) за основание взята сторона AC, то B будет вершина, BD — высота треугольника.

В равнобедренном треугольнике основанием называют обыкновенно ту сторону, которая не принадлежит к равным; тогда вершина равнобедренного треугольника будет вершиной того угла его, который образован равными сторонами. Отрезок BE (рис. 39), соединяющий вершину какого-нибудь угла треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой**. Отрезок прямой BF (рис. 39,a), делящий какой-нибудь угол треугольника пополам, называется **равноделящей** угла треугольника или его **биссектрисой** (биссектриса, вообще говоря, не совпадает ни с медианой, ни с высотой).

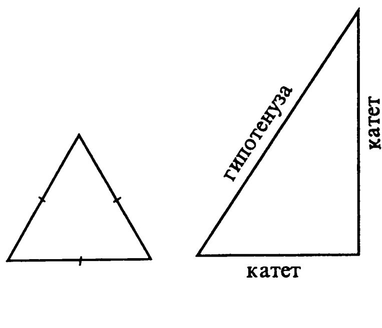


Рис. 36 **Рис. 37**

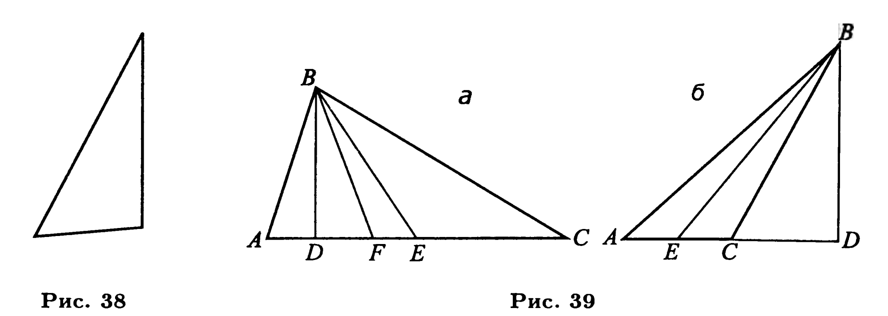


Рис. 38 **Рис. 39**

Из вершины каждого угла треугольника можно опустить перпендикуляр на противоположную сторону или ее продолжение; следовательно, каждый треугольник имеет три высоты. Вершину каждого угла треугольника можно соединить прямой с серединой противоположной стороны, следовательно, каждый треугольник имеет три медианы. Точно так же ясно, что каждый треугольник имеет три биссектрисы.

Симметрия геометрических фигур относительно оси

37. При изучении свойств треугольников, многоугольников и других геометрических фигур часто встречается случай особого расположения на плоскости двух равных фигур или двух равных отрезков, или двух точек по отношению к какой-либо прямой. Если какие-нибудь две точки A и A' (рис. 40) расположены по разные стороны от прямой MN на одном и том же перпендикуляре к этой прямой и на одинаковом расстоянии от основания перпендикуляра ($Aa = A'a$), то такие точки называются **симметричными** относительно прямой MN.

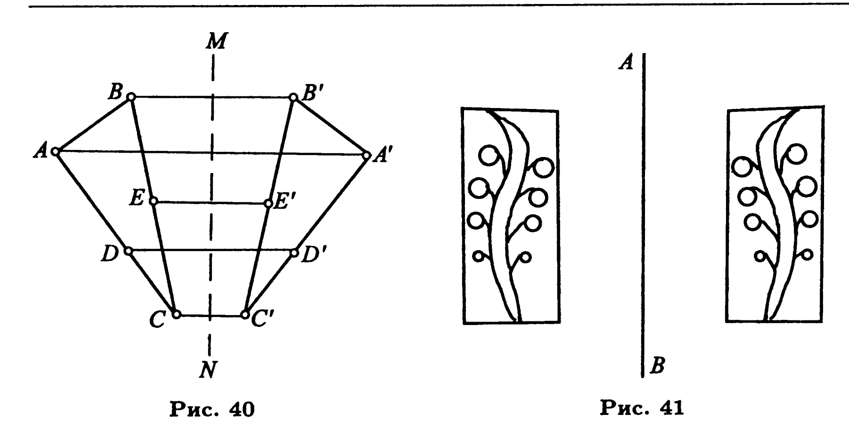


Рис. 40 **Рис. 41**

Две фигуры (или две части одной и той же фигуры) называются симметричными относительно прямой MN, если каждой точке A, B, C, D, $E, \ldots$ (рис. 40) одной фигуры (или одной части фигуры) соответствуют симметричные точки A', B', C', D', $E' \ldots$ другой фигуры (или другой части фигуры), и обратно. Прямая MN в таком случае называется осью симметрии. Здесь слово «ось» применяется потому, что если часть плоскости, лежащую по одну сторону от прямой MN (например, левую часть), станем вращать вокруг MN, как около оси, до тех пор, пока эта часть плоскости не упадет на ту часть, которая лежит по другую сторону от прямой MN (на правую часть), то *симметричные фигуры совместятся*, так как точка A упадет при этом в точку A', точка B — в точку B' и т. д.

Обратно, если вращением вокруг некоторой прямой мы можем фигуру, лежащую по одну сторону от этой прямой, совместить с фигурой, лежащей по другую ее сторону, то эти фигуры симметричны относительно оси вращения. Из сказанного следует, что:

всякие две фигуры, симметричные относительно какой-либо оси, равны между собой.

Симметрия относительно оси называется осевой симметрией.

Замечание. Хотя симметричные фигуры вращением вокруг оси симметрии могут быть приведены в совмещение, однако они, вообще говоря, не тождественны в своем расположении на плоскости. Это нужно понимать в следующем смысле:

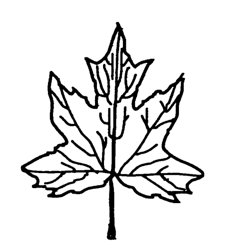


Рис. 42

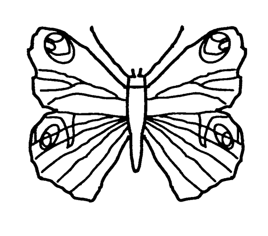


Рис. 43

чтобы совместить две симметричные фигуры, необходимо одну из них перевернуть другой

стороной и, следовательно, на время вывести ее из плоскости. Если же не выводить фигуры из плоскости, то, вообще говоря, никаким перемещением в этой плоскости нельзя привести ее к совпадению с фигурой, ей симметричной относительно оси.

На рис. 41 изображены два узора, симметричные относительно прямой AB. Вращая правый узор около прямой AB, его можно совместить с левым узором.

При этом правый узор будет перевернут другой стороной. Но если не отрывать правого узора от плоскости, а перемещать его так, чтобы он скользил по плоскости, то никаким передвижением его не удастся совместить с левым узором. Осевая симметрия часто встречается в обыденной жизни. Узоры на декоративных тканях и на комнатных обоях, архитектурные украшения на зданиях в виде плоских рисунков и самые фасады зданий имеют обычно форму, симметричную относительно некоторой оси. В природе также часто встречаются симметричные формы. Так, листья деревьев и лепестки цветов имеют форму, симметричную относительно среднего стебля. Таков изображенный на рис. 42 лист клена. Крылья бабочки и самая их расцветка имеют форму, симметричную относительно оси ее туловища (рис. 43).

Некоторые свойства равнобедренного треугольника

38. Теоремы. 1) ***В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть одновременно и медиана и высота.***

2) ***В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.***

Пусть $\triangle ABC$ (рис. 44) равнобедренный и прямая BD делит пополам угол B при вершине его. Требуется доказать, что эта биссектриса BD есть также и медиана и высота.

Вообразим, что $\triangle ABD$ повернут вокруг стороны BD, как около оси, так, чтобы он упал на $\triangle BDC$. Тогда, вследствие равенства углов 1 и 2, сторона AB упадет на BC, а вследствие равенства этих сторон точка A совпадет с C. Поэтому DA совместится с DC, угол 4 совместится с углом 3 и угол 5 — с углом 6; значит,

$$DA = DC, \quad \angle 4 = \angle 3 \quad \text{и} \; \angle 5 = \angle 6.$$

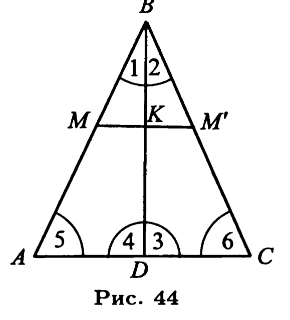


Рис. 44

Из того, что $DA = DC$, следует, что BD есть медиана; из того, что углы 3 и 4 равны, вытекает, что эти углы прямые и, следовательно, BD есть высота треугольника, и, наконец, углы 5 и 6 при основании треугольника равны.

39. Следствие. Мы видим, что в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 44) одна и та же прямая BD обладает четырьмя свойствами: она есть биссектриса угла при вершине, медиана, проведенная к основанию, высота, опущенная на основание, и, наконец, перпендикуляр к основанию, восставленный из его середины.

Так как каждое из этих четырех свойств вполне определяет положение прямой BD, то существование одного из них влечет за собой все остальные. Например, *высота, опущенная на основание равнобедренного треугольника, служит одновременно биссектрисой угла при вершине, медианой, проведенной к основанию, и перпендикуляром к основанию, восставленным в его середине.*

40. Симметрия равнобедренного треугольника. Мы видели, что равнобедренный $\triangle ABC$ (рис. 44) делится биссектрисой BD на такие два треугольника (левый и правый), которые вращением вокруг биссектрисы могут быть совмещены один с другим. Из этого можно заключить, что какую бы точку на одной половине равнобедренного треугольника мы ни взяли, всегда можно на другой его половине найти точку, симметричную с первой относительно оси BD. Возьмем, например, на стороне AB точку M (рис. 44). Опустим из нее на BD перпендикуляр MK и продолжим его до пересечения со стороной BC. Мы получим тогда на этой стороне точку M', симметричную с точкой M относительно оси BD. Действительно, если, вращая $\triangle ABD$ вокруг BD, мы его совместим с $\triangle BCD$, то при этом KM пойдет по KM' (по равенству прямых углов), а сторона BA упадет на сторону BC (по равенству углов при вершине B); значит, точка M, которая лежит на KM и на BA, упадет в точку M', которая лежит и на KM', и на BC. Отсюда видно, что $KM = KM'$. Таким образом, точки M и M' лежат по разные стороны от биссектрисы BD, на одном к ней перпендикуляре и на равных расстояниях от основания этого перпендикуляра; значит, эти точки симметричны относительно оси BD. Таким образом, *в равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине есть его ось симметрии.*

Признаки равенства треугольников

41. Предварительные понятия. Две геометрические фигуры, например два треугольника, как мы знаем, называются равными, если они при наложении могут быть совмещены. В совмещающихся треугольниках, конечно, должны быть соответственно равны все элементы их, т. е. стороны, углы, высоты, медианы и биссектрисы. Однако для того, чтобы утверждать, что два треугольника равны, нет необходимости устанавливать равенства всех их элементов, достаточно убедиться в равенстве только некоторых из них.

42. Три признака равенства треугольников.

Теоремы. 1) ***Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны***

двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.

2) ***Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны.***

3) ***Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

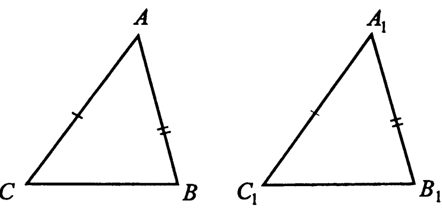


Рис. 45

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (рис. 45), у которых

$$AC = A_1C_1, \quad AB = A_1B_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совпала с A_1 и сторона AC пошла по A_1C_1*). Тогда, вследствие равенства этих сторон, точка C совместится с C_1, вследствие равенства углов A и A_1 сторона AB пойдет по A_1B_1, а вследствие равенства этих сторон точка B совпадет с B_1, поэтому сторона CB совместится с C_1B_1 (так как две точки можно соединить только одной прямой), и треугольники совпадут; значит, они равны.

2) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 46) — два треугольника, у которых

$$\angle C = \angle C_1,$$
$$\angle B = \angle B_1,$$
$$CB = C_1B_1.$$

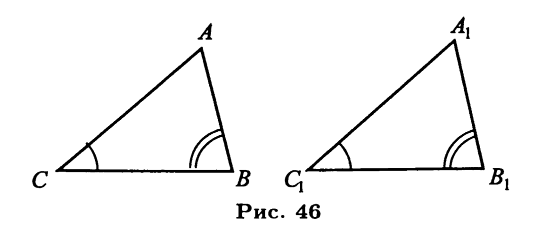


Рис. 46

Требуется доказать, что эти треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы точка C совпала с C_1 и сторона CB пошла по C_1B_1. Тогда, вследствие равенства этих сторон, точка B совпадет с B_1, а вследствие равенства углов B и B_1, C и C_1, сторона BA пойдет по B_1A_1 и сторона CA — по C_1A_1.

*) Для выполнения указанных в этом параграфе наложений иногда приходится накладываемый треугольник перевернуть другой стороной.

Так как две прямые могут пересечься только в одной точке, то вершина A должна совпасть с A_1. Таким образом, треугольники совместятся; значит, они равны.

3) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 47) — два треугольника, у которых

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1, \quad CA = C_1A_1.$$

Требуется доказать, что эти треугольники равны. Доказывать

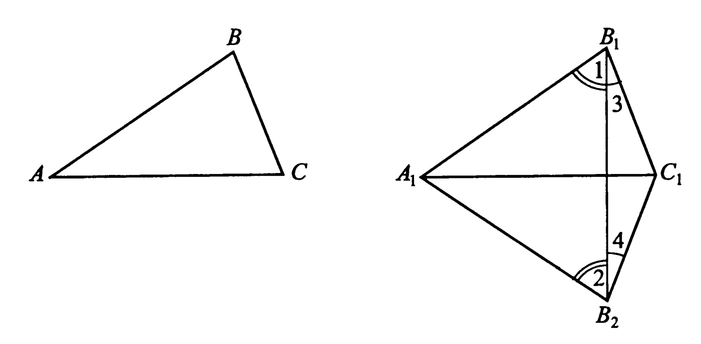


Рис. 47

этот признак равенства наложением, как мы это делали для первых признаков, было бы неудобно, так как, не зная ничего о величине углов, мы не можем утверждать, что при совпадении двух равных сторон совпадут и остальные стороны. Вместо наложения применим здесь **приложение**.

Приложим $\triangle ABC$ к $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные стороны AC и A_1C_1. Тогда $\triangle ABC$ займет положение $\triangle A_1C_1B_2$.

Соединив прямой точки B_1 и B_2, мы получим два равнобедренных треугольника $A_1B_1B_2$ и $B_1C_1B_2$ с общим основанием B_1B_2. Но в равнобедренном треугольнике углы при основании равны (§ 38); следовательно, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, а потому $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_2C_1 = \angle B$. Но в таком случае данные треугольники должны быть равны, так как две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника *).

Замечание. *В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и обратно, против равных углов лежат равные стороны.*

Доказанные теоремы о равенстве треугольников и умение распознавать равные треугольники по указанным признакам чрезвычайно облегчают решение многих геометрических задач и необходимы для

*)Чтобы прямая B_1B_2 проходила всегда внутри фигуры $A_1B_1C_1B_2$, надо прикладывать треугольники друг к другу так, чтобы их общая сторона A_1C_1 была наибольшей из сторон.

доказательства многих теорем. Теоремы о равенстве треугольников являются главным средством для обнаружения свойств сложных геометрических фигур. Учащиеся убедятся в этом при дальнейшем прохождении предмета.

Внешний угол треугольника и его свойство

43. Определение. Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника (или многоугольника), называется **внешним** углом этого треугольника (или многоугольника).

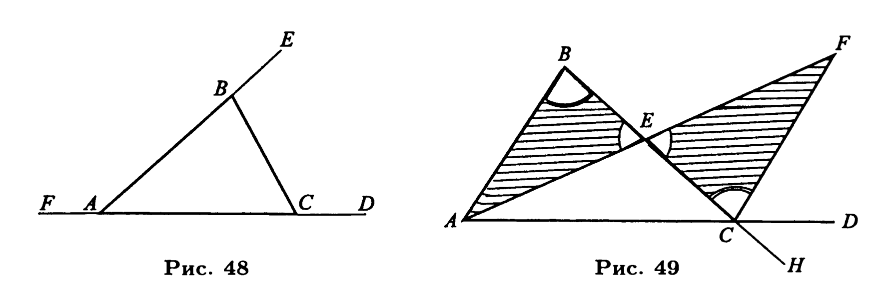


Рис. 48 Рис. 49

Таковы, например, углы (рис. 48) BCD, CBE, BAF. В отличие от внешних углы самого треугольника (или многоугольника) называются **внутренними**.

При каждом угле треугольника (или многоугольника) можно построить по два внешних угла (продолжив одну или другую сторону угла). Эти два угла равны, как углы вертикальные.

44. Теорема. ***Внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла его, не смежного с этим внешним.***

Например, докажем, что внешний $\angle BCD$ $\triangle ABC$ (рис. 49) больше каждого из внутренних углов A и B, не смежных с этим внешним.

Через середину E стороны BC проведем медиану AE и на ее продолжении отложим отрезок $EF + AE$. Точка F, очевидно, будет лежать внутри угла BCD. Соединим F с C прямой. Треугольники ABE и EFC (покрытые штрихами) равны, так как при точке E они имеют по равному углу, заключенному между двумя соответственно равными сторонами. Из равенства их заключаем, что углы B и ECF, лежащие против равных сторон AE и EF, равны. Но угол ECF составляет часть внешнего угла BCD и потому меньше его; следовательно, и угол B меньше угла BCD.

Продолжив сторону BC за точку C, мы получим внешний угол ACH, равный углу BCD. Если из вершины B проведем к стороне AC медиану и продолжим ее на такую же длину за сторону AC, то совершенно так же докажем, что угол A меньше угла ACH, т. е. меньше угла BCD.

45. С л е д с т в и е. *Если в треугольнике один угол прямой или тупой, то два других угла острые.* Действительно, допустим, что какой-нибудь $\angle C$ $\triangle ABC$ (рис. 50 и 51) будет прямой или тупой, тогда смежный с ним внешний угол ВСО должен быть прямой или острый; следовательно, углы A и B, которые, по доказанному, меньше этого внешнего угла, должны быть оба острые.

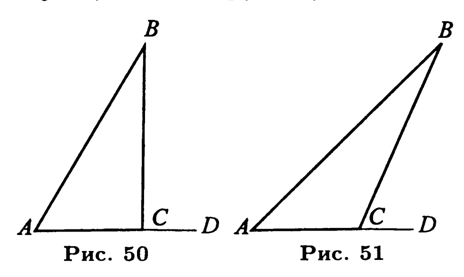


Рис. 50 **Рис. 51**

Соотношения между сторонами и углами треугольника

46. Т е о р е м ы . Во всяком треугольнике

1) против равных сторон лежат равные углы;

2) против большей стороны лежит больший угол.

1) Если две стороны треугольника равны, то он равнобедренный, тогда углы, лежащие против этих сторон, должны быть равны, как углы при основании равнобедренного треугольника (§ 38).

2) Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 52) сторона AB больше BC; требуется доказать, что угол C больше угла A.

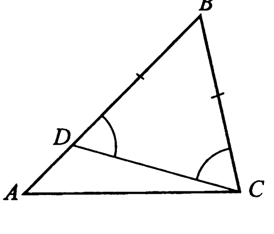


Рис. 52

Отложим на большей стороне BA от вершины B отрезок BD, равный меньшей стороне BC, и соединим D с C прямой. Тогда получим равнобедренный $\triangle DBC$, у которого углы при основании равны, т. е. $\angle BDC = \angle BCD$. Но угол BDC, как внешний по отношению к $\triangle ADC$, больше угла A, следовательно, и угол BCD больше угла A, а потому и подавно угол BCA больше угла A, что и требовалось доказать.

47. О б р а т н ы е т е о р е м ы. ***Во всяком треугольнике:***

1) ***против равных углов лежат равные стороны***;

2) ***против большего угла лежит бóльшая сторона.***

1) Пусть в $\triangle ABC$ углы A и C равны (рис. 53); требуется доказать, что $BA = BC$.

Предположим противное, т. е. что стороны AB и BC не равны. Тогда одна из этих сторон должна быть больше другой, и, следовательно, согласно прямой теореме, один из углов A и C должен быть больше другого. Но это противоречит условию, что $\angle A = \angle C$; значит, нельзя допустить, что стороны AB и BC не равны; остается принять, что $AB = BC$.

2) Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 54) угол C больше угла A; требуется доказать, что $AB > BC$.

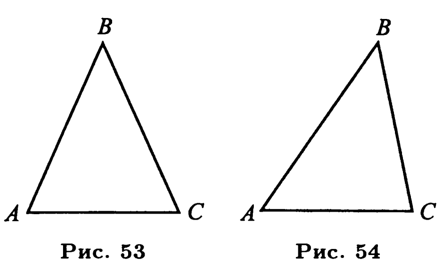


Рис. 53 Рис. 54

Предположим противное, т. е. что AB не больше BC. Тогда могут представиться два случая: или $AB = BC$, или $AB < BC$.

В первом случае, согласно прямой теореме, угол C был бы равен углу A, во втором случае угол C был бы меньше угла A; и то и другое противоречит условию; значит, оба эти случая исключаются. Остается один возможный случай, что $AB > BC$.

Следствия. 1) *В равностороннем треугольнике все углы равны.*

2) *В равноугольном треугольнике все стороны равны.*

48. Доказательство от противного. Способ, которым мы только что доказали обратные теоремы, называется **доказательством от противного**, или **приведением к нелепости** (reductio ad absurdum). Первое название этот способ получил потому, что в начале рассуждения делается предположение, противное (противоположное) тому, что требуется доказать. Приведением к нелепости он называется вследствие того, что, рассуждая на основании сделанного предположения, мы приходим к нелепому выводу (к абсурду). Получение такого вывода заставляет нас отвергнуть сделанное вначале допущение и принять то, которое требовалось доказать.

Этот прием очень часто употребляется для доказательства теорем.

49. Замечание об обратных теоремах. Начинающие изучать геометрию часто делают одну характерную ошибку. Она заключается в том, что правильность обратной теоремы считают само собой разумеющейся, если доказана прямая теорема. Отсюда представление, что доказательство обратных теорем вообще излишне. Ошибочность такого заключения может быть показана в ряде примеров. В частности, такой пример был приведен в § 30. Поэтому обратные теоремы, когда они верны, всегда доказываются особо.

Сравнительная длина прямолинейного отрезка и ломаной линии

50. Теорема. ***В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон.***

Если в треугольнике возьмем сторону не самую большую, то, конечно, она окажется менее суммы двух других сторон. Значит, нам надо доказать, что даже наибольшая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Пусть в $\triangle ABC$ (рис. 55) наибольшая сторона есть AC. Продолжив сторону AB, отложим $BD = BC$ и проведем DC. Так как $\triangle BDC$

равнобедренный, то $\angle D = \angle DCB$; поэтому угол D меньше угла DCA, и, следовательно, в ΔADC сторона AC меньше AD (§ 47), т. е. $AC < AB + BD$. Заменив BD на BC, получим:

$$AC < AB + BC.$$

Следствие. Отнимем от обеих частей выведенного неравенства по AB или по BC:

$$AC - AB < BC;$$
$$AC - BC < AB.$$

Читая эти неравенства справа налево, видим, что каждая из сторон BC и AB больше разности двух других сторон; так как это же можно, очевидно, сказать и о третьей, наибольшей стороне AC, то, значит, *в треугольнике каждая сторона больше разности двух других сторон.*

51. Теорема. ***Отрезок прямой, соединяющий две какие-нибудь точки, меньше всякой ломаной, соединяющей эти же точки.***

Если ломаная, о которой говорится здесь, состоит только из двух сторон, то теорема уже была доказана в предыдущем параграфе. Рассмотрим случай, когда ломаная состоит более чем из двух сторон. Пусть AE (рис. 56) есть отрезок прямой, соединяющий точки A

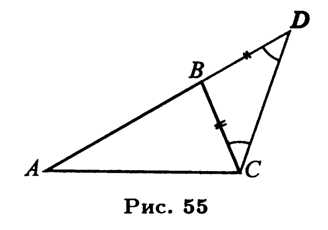


Рис. 55

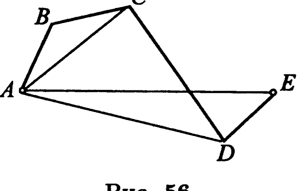


Рис. 56

и E, а $ABCDE$ — какая-нибудь ломаная, соединяющая те же точки. Требуется доказать, что AE меньше суммы $AB + BC + CD + DE$.

Соединив A с C и D, находим, согласно предыдущей теореме:

$$AE < AD + DE;$$
$$AD < AC + CD;$$
$$AC < AB + BC.$$

Сложим почленно эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем по AD и AC, тогда получим:

$$AE < AB + BC + CD + DE.$$

52. Треугольники с двумя соответственно равными сторонами.

Теоремы. ***Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то***:

1) ***против большего из углов, заключенных между ними, лежит большая сторона***;

2) обратно: ***против большей из неравных сторон лежит больший угол.***

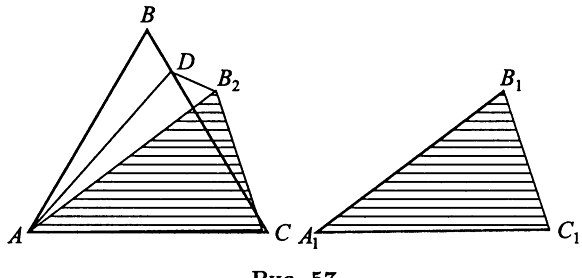


Рис. 57

1) Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано (рис. 57): $AC = A_1C_1$ $AB = A_1B_1$ и $\angle A > \angle A_1$. Требуется доказать, что $BC > B_1C_1$. Наложим $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, чтобы сторона A_1C_1 совпадала с AC. Так как $\angle A_1 < \angle BAC$, то сторона A_1B_1 пойдет внутри угла BAC; пусть $\triangle A_1B_1C_1$ займет положение AB_2C (вершина B_2 может оказаться или вне $\triangle ABC$, или внутри него, или же на стороне BC; доказательство может быть применено ко всем этим случаям). Проведем биссектрису AD угла BAB_2 и соединим D с B_2; тогда получим два треугольника: ABD и DAB_2, которые равны, потому что у них AD — общая сторона, $AB = AB_2$ по условию и $\angle BAD = \angle DAB_2$ по построению. Из равенства треугольников следует: $BD = DB_2$. Теперь из $\triangle DCB_2$ выводим: $D_2C < B_2D + DC$ (§ 50), или (заменив B_2D на BD):

$$B_2C < BD + DC, \quad \text{значит,} \quad B_1C_1 < BC.$$

2) Пусть в тех же треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ дано: $AB = A_1B_1$; $AC = A_1C_1$ и $BC > B_1C_1$; докажем, что $\angle A > \angle A_1$.

Допустим противное, т. е. что угол A не больше угла A_1, тогда могут представиться два случая: или $\angle BAC = \angle A_1$, или $\angle BAC < \angle A_1$. В первом случае треугольники были бы равны и, следовательно, сторона BC равнялась бы B_1C_1, что противоречит условию; во втором случае сторона BC (согласно теореме 1) была бы меньше B_1C_1, что также противоречит условию. Значит, оба эти случая исключаются; остается один возможный случай, что $\angle A > \angle A_1$.

Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных

53. Теорема. ***Перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки на прямую, меньше всякой наклонной, проведенной из той же точки на эту прямую****).

Пусть AB (рис. 58) есть перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую MN, и AC — какая-нибудь наклонная, проведенная из той же точки A к прямой MN; требуется доказать, что $AB < AC$.

В $\triangle ABC$ угол B прямой, а угол C острый (§ 45); значит, $\angle C < \angle B$ и потому $AB < AC$, что и требовалось доказать.

Замечание. Когда говорят: «расстояние точки от прямой», то разумеют кратчайшее расстояние, измеряемое по перпендикуляру, опущенному из этой точки на прямую.

54. Теорема. ***Если из одной и той же точки, взятой вне прямой, проведены к этой прямой перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:***

1) ***если основания двух наклонных одинаково удалены от основания перпендикуляра, то такие наклонные равны;***

2) ***если основания двух наклонных неодинаково удалены от основания перпендикуляра, то та из наклонных больше, основание которой дальше отстоит от основания перпендикуляра.***

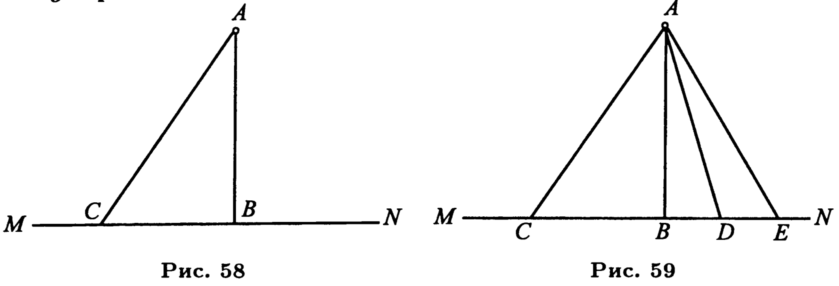


Рис. 58 **Рис. 59**

1) Пусть AC и AD (рис. 59) будут две наклонные, проведенные из точки A к прямой MN, основания которых C и D одинаково удалены от основания перпендикуляра AB, т. е. $CB = BD$; требуется доказать, что $AC = AD$.

В треугольниках ABC и ABD есть общая сторона AB и сверх того $BC = BD$ (по условию) и $\angle ABC = \angle ABD$ (как углы прямые); значит, эти треугольники равны, и потому $AC = AD$.

2) Пусть AC и AE (рис. 59) будут две такие наклонные, проведенные из точки a к прямой MN, основания которых неодинаково

*) В пп. 53, 54 и 55 ради краткости термины «перпендикуляр» и «наклонная» употребляются вместо «отрезок перпендикуляра, ограниченный данной точкой и основанием перпендикуляра» и «отрезок наклонной, ограниченный данной точкой и основанием наклонной».

удалены от основания перпендикуляра; например, пусть $BE > BC$. Требуется доказать, что $AE > AC$.

Отложим $BD = BC$ и проведем AD. По доказанному выше $AD = AC$. Сравним AE с AD. Угол ADE есть внешний по отношению $\triangle ABD$, и потому он больше прямого угла ABD; следовательно, угол ADE тупой, и потому угол AED должен быть острый (§ 45), значит, $\angle ADE > \angle AED$ и, следовательно, $AE > AD$, и потому $AE > AC$.

55. Обратные теоремы. ***Если из одной и той же точки, взятой вне прямой*** (рис. 59), ***проведены к этой прямой перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:***

1) ***если две наклонные равны, то их основания одинаково удалены от основания перпендикуляра;***

2) ***если две наклонные не равны, то основание большей из них дальше отстоит от основания перпендикуляра.***

Предоставляем учащимся самим доказать эти теоремы (способом от противного).

Признаки равенства прямоугольных треугольников

56. Два признака, не требующие особого доказательства. Так как в прямоугольных треугольниках углы, содержащиеся между катетами, всегда равны, как углы прямые, то ***прямоугольные треугольники равны***:

1) ***если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого***;

2) ***если катет и прилежащий к нему острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого треугольника.***

Эти два признака не требуют особого доказательства, так как они представляют частные случаи общих признаков. Докажем еще два следующих признака, относящихся только к прямоугольным треугольникам.

57. Два признака, требующие особого доказательства. Теоремы. ***Прямоугольные треугольники равны***:

1) ***если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого*** или

2) ***если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.***

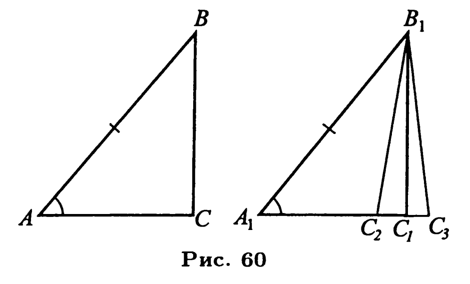


Рис. 60

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 60) — два прямоугольных треугольника, у которых

$AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$; требуется доказать, что эти треугольники равны.

Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные гипотенузы. Тогда по равенству углов A и A_1 катет AC пойдет по A_1C_1. При этом точка C должна совпадать с точкой C_1, потому что если предположим, что она не совпадет с точкой C_1, то тогда катет BC занял бы положение B_1C_2 или B_1C_3, что невозможно, так как из одной точки B_1 нельзя на прямую A_1C_1 опустить два перпендикуляра (B_1C_1 и B_1C_2 или B_1C_1 и B_1C_3).

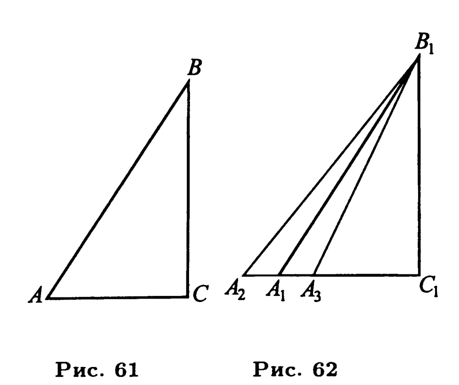


Рис. 61 **Рис. 62**

2) Пусть (рис. 61 и 62) в прямоугольных треугольниках дано: $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$; требуется доказать, что треугольники равны. Наложим $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, чтобы у них совместились равные катеты BC и B_1C_1. Тогда по равенству прямых углов CA пойдет по C_1A_1. При этом гипотенуза AB не может не совместиться с гипотенузой A_1B_1, потому что, если бы она заняла положение A_2B_1 или A_3B_1, то тогда мы имели бы с две равные наклонные (A_1B_1 и A_2B_1 или A_1B_1 и A_3B_1, которые неодинаково удалены от основания перпендикуляра, что невозможно (§ 54).

Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку прямой через его середину, и свойство биссектрисы угла

58. Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку прямой через его середину, и свойство биссектрисы угла очень сходны между собой. Чтобы лучше видеть сходство этих свойств, мы изложим их параллельно.

1) ***Если какая-нибудь точка*** (K, рис. 63) ***лежит на перпендикуляре*** (MN), ***проведенном через середину отрезка***(AB), ***то она одинаково удалена от концов этого отрезка*** (т.е. $KA = KB$)

1) ***Если какая-нибудь точка*** (K, рис. 64) ***лежит на биссектрисе*** (OM угла (AOB), ***то она одинаково удалена от сторон этого угла*** (т.е. перпендикуляры KD и KC равны).

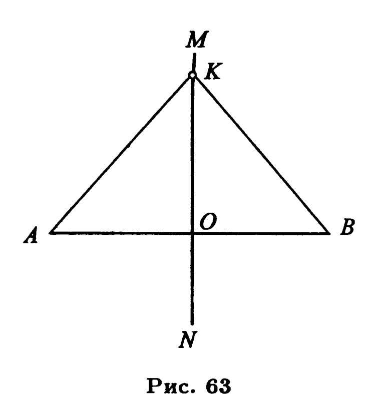


Рис. 63

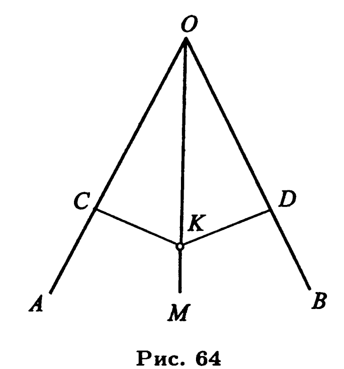


Рис. 64

Так как $MN \perp AB$ и $AO = OB$, то AK и KB суть наклонные к AB, основания которых одинаково удалены от основания перпендикуляра, значит $KA = KB$.

Так как OM делит угол пополам, то прямоугольные треугольники OCK и ODK, имея общую гипотенузу и равные острые углы при вершине O, равны и потому $KC = KD$.

2) Обратная теорема.

Если какая-нибудь точка (K, рис. 63) ***одинаково удалена от концов отрезка*** AB (т. е. если $KA = KB$), ***то она лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку*** AB ***через его середину.***

Проведем через K прямую $MN \perp AB$; тогда мы получим два прямоугольных треугольника KAO и KBO, которые, имея общий катет KO и равные гипотенузы, равны, а потому $AO = OB$. Значит, прямая MN, проведенная нами через K перпендикулярно к AB, делит отрезок AB пополам.

2) Обратная теорема.

Если какая-нибудь точка (K, рис. 64) ***одинаково удалена от сторон угла*** (т. е. если перпендикуляры KC и KD равны), ***то она лежит на биссектрисе этого угла.***

Через O и K проведем прямую OM. Тогда получим два прямоугольных треугольника OCK и ODK, которые, имея общую гипотенузу и равные катеты CK и DK, равны, а потому равны и углы при вершине O. Значит, прямая OM, проведенная через точку K, будет биссектрисой угла AOB.

59. Следствие. Из двух доказанных теорем (прямой и обратной) можно вывести еще следующие противоположные теоремы:

Если какая-нибудь точка не лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку через его середину, то она неодинаково удалена от концов этого отрезка.

Если какая-нибудь точка не лежит на биссектрисе угла, то она неодинаково удалена от сторон этого угла.

Предоставляем самим учащимся доказать эти теоремы (способом от противного).

60. Геометрическое место. Геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, называется такая линия (или поверхность в пространстве) или вообще такая совокупность точек, которая содержит в себе все точки, обладающие этим свойством, и не содержит ни одной точки, не обладающей им.

Например, геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии r от данной точки C, есть окружность с центром в точке C и радиусом r. Из теорем предыдущих параграфов следует:

Геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух данных точек, есть перпендикуляр, проведенный к отрезку прямой, соединяющему эти точки, через его середину.

Геометрическое место точек, одинаково удаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

4. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

61. Предварительное замечание. Теоремы, доказанные нами ранее, позволяют решать некоторые задачи на построение. Заметим, что в элементарной геометрии рассматриваются только такие построения, которые могут быть выполнены с помощью линейки и циркуля. Употребление чертежного треугольника и некоторых других приборов хотя и допускается ради сокращения времени, но не является необходимым.

62. Задача 1. *Построить треугольник по трем его сторонам a, b и c* (рис. 65).

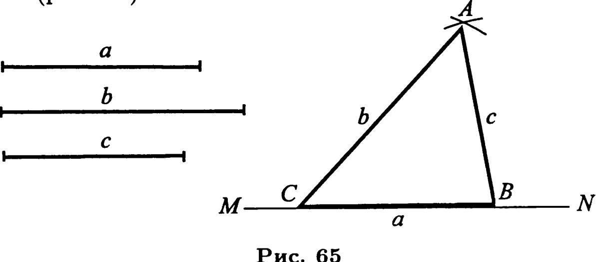


Рис. 65

На какой-нибудь прямой MN откладываем отрезок CB, равный одной из данных сторон, например a. Описываем две небольшие

дуги с центрами в точках C и B, одну радиусом, равным b, другую радиусом, равным c. Точку A, в которой эти дуги пересекаются, соединяем с B и C; $\triangle ABC$ будет искомый.

Замечание. Чтобы три отрезка прямой могли служить сторонами треугольника, необходимо, чтобы больший из них был меньше суммы двух остальных (§ 50).

63. Задача 2. *Построить угол, равный данному углу ABC, одной из сторон которого является данная прямая и вершина которого находится в данной точке O (точка O расположена на прямой MN*, рис. 66).

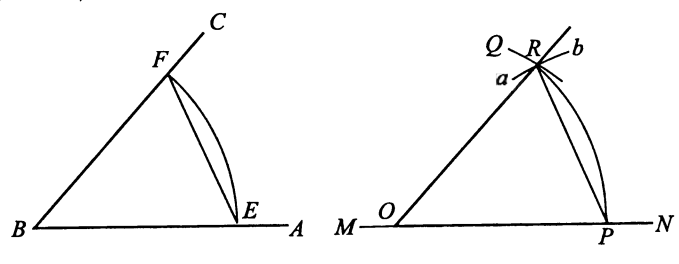


Рис. 66

Описываем произвольным радиусом с центром в вершине B между сторонами данного угла дугу EF; затем, не изменяя раствора циркуля, переносим его острие в точку O и описываем дугу PQ. Далее описываем дугу ab с центром в точке P радиусом, равным расстоянию между точками E и F. Наконец, через точки O и R (пересечение двух дуг) проводим прямую. Угол ROP равен углу ABC, потому что треугольники ROP и FBE, имеющие соответственно равные стороны, равны.

64. Задача 3. *Разделить данный угол ABC пополам* (рис. 67), другими словами, *построить биссектрису данного угла* или провести его *ось симметрии*. С центром в вершине B произвольным радиусом опишем между сторонами угла дугу DE. Затем, взяв произвольный раствор циркуля, бóльший, однако, половины расстояния между точками E и D (см. замечание к задаче 1), описываем этим раствором небольшие дуги с центрами в точках D и E, которые пересекутся в некоторой точке F. Проведя прямую BF, мы получим биссектрису угла ABC.

Для доказательства соединим прямыми точку F с D и E; тогда получим два треугольника BEF и BDF, которые равны, так как у них BF — общая сторона, $BD = BE$ и $DF = EF$ по построению. Из равенства треугольников следует: $\angle ABF = \angle CBF$.

65. Задача 4. *Из данной точки C прямой AB восставить к этой прямой перпендикуляр* (рис. 68).

Отложим на AB по обе стороны от данной точки C равные отрезки (произвольной длины) CD и CE. С центрами в точках E и D одним

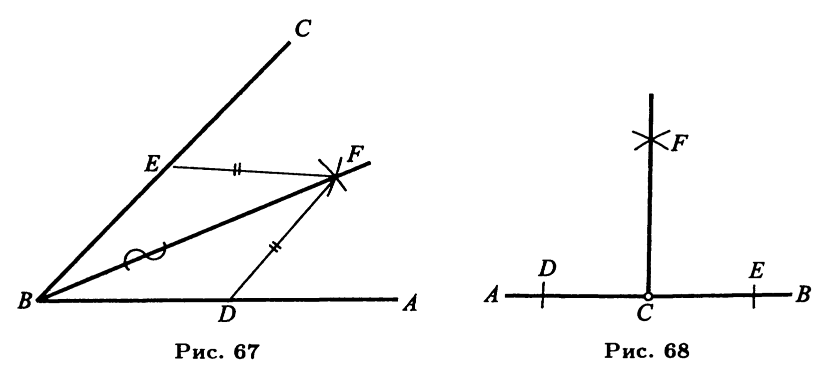


Рис. 67 Рис. 68

и тем же раствором циркуля (бо́льшим, однако, CD) опишем две небольшие дуги, которые пересекутся в некоторой точке F. Прямая, проведенная через точки C и F, будет искомым перпендикуляром.

Действительно, как видно из построения, точка F одинаково удалена от точек D и E; следовательно, она должна лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку DE через его середину (§ 58); но середина этого отрезка есть C, а через точки C и F можно провести только одну прямую; значит, $FC \perp DE$.

66. Задача 5. *Из данной точки A опустить перпендикуляр на данную прямую BC* (рис. 69).

С центром в точке A произвольным раствором циркуля (бо́льшим, однако, расстояния от A до BC) опишем дугу, которая пересечется с BC в каких-нибудь точках D и E. С центрами в этих точках произвольным, но одним и тем же раствором циркуля (бо́льшим, однако, $\frac{1}{2}DE$), проводим две небольшие дуги, которые пересекутся между собой в некоторой точке F. Прямая AF будет искомым перпендикуляром.

Действительно, как видно из построения, каждая из точек A и F одинаково удалена от D и E, а такие точки лежат на перпендикуляре, проведенном к отрезку DE через его середину (§ 58).

67. Задача 6. *Провести перпендикуляр к данному отрезку прямой (AB) через его середину* (рис. 70); другими словами, *построить ось симметрии отрезка* (AB). Произвольным, но одинаковым раствором циркуля (бо́льшим $\frac{1}{2}AB$) описываем две дуги с центрами в точках A и B, которые пересекутся между собой в некоторых точках C и D. Прямая CD будет искомым перпендикуляром.

Действительно, как видно из построения, каждая из точек C и D одинаково удалена от A и B; следовательно, эти точки должны лежать на оси симметрии отрезка AB.

Задача 7. *Разделить пополам данный отрезок прямой* (рис. 70). Решается так же, как предыдущая задача.

68. Пример более сложной задачи. При помощи этих основных задач можно решать задачи более сложные. Для примера решим следующую задачу.

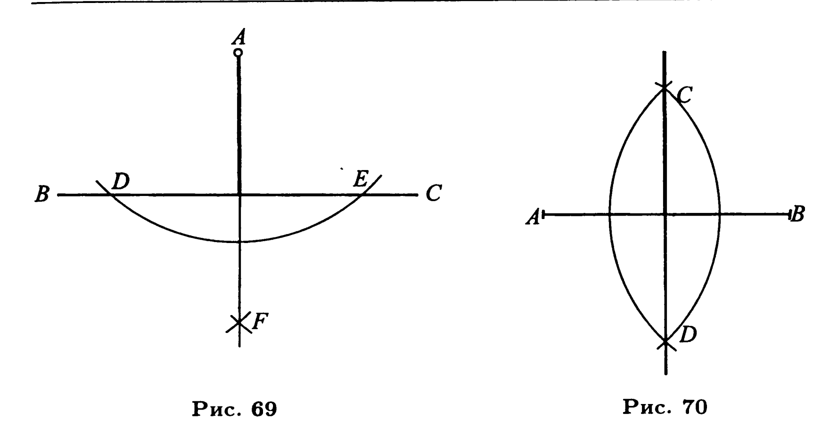


Рис. 69 **Рис. 70**

З а д а ч а. *Построить треугольник, зная его основание B, угол a, прилежащий к основанию, и сумму s двух боковых сторон* (рис. 71).

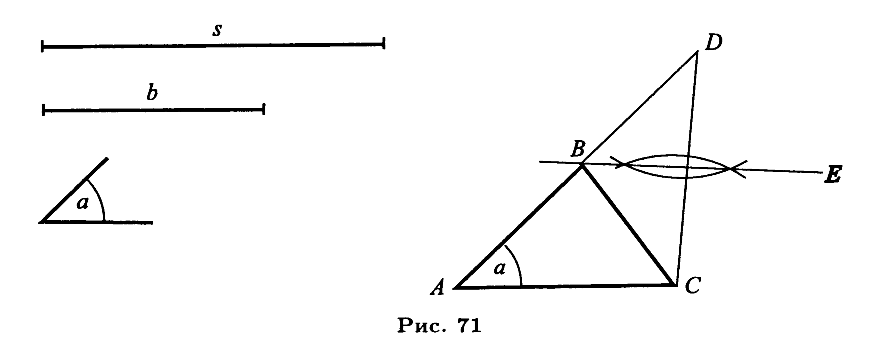


Рис. 71

Чтобы составить план решения, предположим, что задача решена, т. е. что найден такой $\triangle ABC$, у которого основание $AC = b$, $\angle A = a$ и $AB + BC = s$. Рассмотрим теперь полученный чертеж. Сторону AC, равную b, и угол A, равный a, мы построить умеем. Значит, остается найти на другой стороне угла A такую точку B, чтобы сумма $AB + BC$ равнялась s. Продолжив AB, отложим отрезок AD, равный s.

Теперь вопрос приводится к тому, чтобы на прямой AD отыскать такую точку B, которая была бы одинаково удалена от C и D. Такая точка, как мы знаем (§ 58), должна лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку CD через его середину. Точка B найдется в пересечении этого перпендикуляра с AD.

Итак, вот решение задачи: строим (рис. 71) угол A, равный данному углу a; на сторонах его откладываем $AC = b$ и $AD = s$ и соединяем точку D с C. Через середину отрезка CD проводим перпендикуляр BE; пересечение его с AD, т. е. точку B, соединяем с C. $\triangle ABC$ будет

искомый, так как он удовлетворяет всем требованиям задачи: у него $AC = b$, $\angle A = a$ и $AB + BC = s$ (потому что $BD = BC$).

Рассматривая построение, мы замечаем, что задача возможна не при всяких данных. Действительно, если сумма задана слишком малой сравнительно с b, то перпендикуляр BE может не пересечь отрезка AD (или пересечет его продолжение за точку A или за точку D); в этом случае задача окажется невозможной. И независимо от построения можно видеть, что задача невозможна, если $s < b$ или $s = b$, потому что не может быть такого треугольника, у которого сумма двух сторон была бы меньше или равна третьей стороне.

В том случае, когда задача возможна, она имеет только одно решение, т. е. существует только один треугольник, удовлетворяющий требованиям задачи, так как перпендикуляр BE может пересечься с прямой AD только в одной точке.

69. Замечание. Из приведенного примера видно, что решение сложной задачи на построение состоит из следующих четырех частей:

1) Предположив, что задача решена, делают от руки приблизительный чертеж искомой фигуры и затем, внимательно рассматривая начерченную фигуру, стремятся найти такие зависимости между данными задачи и искомыми, которые позволили бы свести задачу к другим, известным ранее. Эта самая важная часть решения задачи, имеющая целью составить план решения, носит название **анализа**.

2) Когда таким образом план решения найден, выполняют сообразно ему **построение**.

3) Для проверки правильности плана показывают затем на основании известных теорем, что полученная фигура удовлетворяет всем требованиям задачи. Эта часть называется **синтезом**.

4) Затем задаются вопросом, при всяких ли данных задача возможна, допускает ли она одно решение или несколько, и нет ли в задаче каких-либо особенных случаев, когда построение упрощается или, наоборот, усложняется. Эта часть решения называется **исследованием** задачи.

Когда задача очень проста и не может быть сомнения относительно ее возможности, то обыкновенно анализ и исследование опускают, а указывают прямо построение и приводят доказательство. Так мы делали, излагая решение первых семи задач этой главы; так же будем делать и впоследствии, когда нам придется излагать решения несложных задач.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. В равнобедренном треугольнике две медианы равны, две биссектрисы равны, две высоты равны.

2. Если из середины каждой из равных сторон равнобедренного треугольника восставим перпендикуляры до пересечения с другой из равных сторон, то эти перпендикуляры будут равны.

3. Прямая, перпендикулярная к биссектрисе угла, отсекает от его сторон равные отрезки.

4. Медиана треугольника меньше его полупериметра.

5. Медиана треугольника меньше полусуммы сторон, между которыми она заключается.

Указание. Продолжить медиану на расстояние, равное ей, полученную точку соединить с одним концом стороны, к которой проведена медиана, и рассмотреть образовавшуюся фигуру.

6. Сумма медиан треугольника меньше периметра, но больше полупериметра.

Указание. См. предыдущее упражнение, а также следствие в § 50.

7. Сумма диагоналей четырехугольника меньше его периметра, но больше полупериметра.

8. Доказать как прямую теорему, что всякая точка, не лежащая на перпендикуляре, проведенном к отрезку прямой через его середину, неодинаково удалена от концов этого отрезка, а именно: она ближе к тому концу, с которым она расположена по одну сторону от перпендикуляра.

9. Доказать как прямую теорему, что всякая точка, не лежащая на биссектрисе угла, неодинаково отстоит от сторон его.

10. Медиана, исходящая из какой-нибудь вершины треугольника, равно отстоит от двух других его вершин.

11. На одной стороне угла A отложены отрезки AB и AC и на другой стороне отложены отрезки $AB' = AB$ и $AC' = AC$. Доказать, что прямые BC' и BC пересекаются на биссектрисе угла A.

12. Вывести отсюда способ построения биссектрисы угла.

13. Если A' и A, B и B' — две пары точек, симметричных относительно какой-нибудь прямой XY, то четыре точки A, A', B, B' лежат на одной окружности.

14. Дан острый угол XOY и точка A внутри этого угла. Найти на стороне OB точку B и на стороне OY точку C так, чтобы периметр $\triangle ABC$ был наименьший.

Указание. Надо взять точки, симметричные с A относительно сторон OX и OY.

Задачи на построение

15. Построить сумму двух, трех и более углов.

16. Построить разность двух углов.

17. По данной сумме и разности двух углов найти эти углы.

18. Разделить угол на 4, 8 и 16 равных частей.

19. Через вершину данного угла провести вне его такую прямую, которая со сторонами угла образовала бы равные углы.

20. Построить треугольник: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим углам; в) по двум сторонам и углу, лежащему против большей из них; г) по двум сторонам и углу, лежащему против меньшей из них (в этом случае получаются два решения, или одно, или ни одного).

21. Построить равнобедренный треугольник: а) по основанию и боковой стороне; б) по основанию и прилежащему углу; в) по боковой стороне и углу при вершине; г) по боковой стороне и углу при основании.

22. Построить прямоугольный треугольник: а) по двум катетам; б) но катету и гипотенузе; в) по катету и прилежащему острому углу.

23. Построить равнобедренный треугольник: а) по высоте и боковой стороне; б) по высоте и углу при вершине; в) по основанию и перпендикуляру, опущенному из конца основания на боковую сторону.

24. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

25. Через точку, данную внутри угла, провести такую прямую, которая отсекла бы от сторон угла равные части.

26. По данной сумме и разности двух отрезков найти эти отрезки.

27. Разделить данный отрезок на 4, 8, 16 равных частей.

28. На данной прямой найти точку, одинаково удаленную от двух данных точек (вне прямой).

29. Найти точку, ра́вно отстоящую от трех вершин треугольника.

30. На прямой, пересекающей стороны угла, найти точку, одинаково удаленную от сторон этого угла.

31. Найти точку, одинаково удаленную от трех сторон треугольника.

32. На бесконечной прямой AB найти такую точку C, чтобы полупрямые CM и CN, проведенные из C через данные точки M и N, расположенные по одну сторону от AB, составляли с полупрямыми CA и CB равные углы.

Указание. Построить точку M', симметричную с M относительно оси AB, и соединить M' с N.

33. Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы с другим катетом.

34. Построить треугольник по основанию, углу, прилежащему к основанию, и разности двух других сторон. (Рассмотреть два случая: 1) когда дан меньший из двух углов, прилежащих к основанию; 2) когда дан больший из них.)

Указание. См. задачу §68.

35. Построить прямоугольный треугольник по катету и разности двух других сторон.

36. Дан угол A и точки B и C, расположенные одна на одной стороне угла, другая — на другой. Найти: 1) точку M, равно отстоящую от сторон угла, и такую, чтобы $MC = MB$; 2) точку N, равно отстоящую от сторон угла так, чтобы $NC = CB$.

37. По соседству с железной дорогой расположены две деревни A и B. Найти на линии железной дороги (имеющей прямолинейную форму) место для станции, которая была бы одинаково удалена от A и B.

38. Дан угол A и точка B на одной из его сторон. Найти на другой стороне такую точку C, чтобы сумма $CA + CB$ была равна данному отрезку l.

5. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Основные теоремы

70. Определение. Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и **не пересекаются**, сколько бы их ни продолжали.

Параллельность прямых обозначается письменно знаком ||. Так, если прямые AB и CO параллельны, то пишут: $AB \| CO$.

Возможность существования параллельных прямых обнаруживается следующей теоремой.

71. Теорема. ***Два перпендикуляра*** (AB и CD, рис. 72) ***к одной и той же прямой*** (MN) ***не могут пересечься, сколько бы мы их ни продолжали.***

Действительно, если бы эти перпендикуляры пересеклись в какой-нибудь точке P, то из этой точки на прямую MN были бы опущены два перпендикуляра, что невозможно (§ 24). Таким образом, два перпендикуляра к одной прямой параллельны между собой.

72. Названия углов, получаемых при пересечении двух прямых третьей. Пусть две прямые AB и CD (рис. 73) пересечены третьей прямой MN. Тогда получаются 8 углов (мы их обозначили цифрами), которые попарно носят следующие названия:

соответственные углы: 1 и 5, 4 и 8, 2 и 6, 3 и 7;

накрест лежащие углы: 3 и 5, 4 и 6 (внутренние); 1 и 7, 2 и 8 (внешние);

односторонние углы: 4 и 5, 3 и 6 (внутренние); 1 и 8, 2 и 7 (внешние).

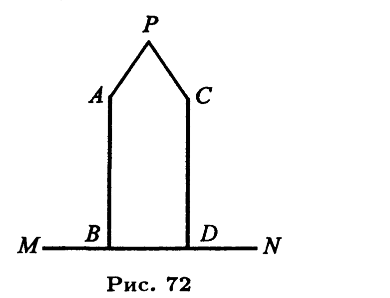


Рис. 72

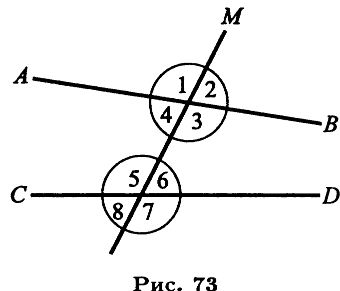


Рис. 73

73. ***Признаки параллельности двух прямых. Если при пересечении двух прямых*** (AB и CD, рис. 74) ***третьей прямой*** (MN) ***окажется, что:***

1) ***какие-нибудь соответственные углы равны,*** или
2) ***какие-нибудь накрест лежащие углы равны,*** или
3) ***сумма каких-нибудь двух внутренних или двух внешних односторонних углов равна*** $2d$,

то эти две прямые параллельны.

Пусть, например, дано, что соответственные углы 2 и 6 равны; требуется доказать, что в таком случае $AB \| CD$. Предположим противное, т. е. что прямые AB и CD не параллельны; тогда эти прямые пересекутся в какой-нибудь точке p, лежащей направо от MN, или в какой-нибудь точке p', лежащей налево от MN. Если пересечение будет в p, то образуется треугольник, в котором угол 2 будет внешним, а угол 6 — внутренним, не смежным с внешним углом 2, и, значит, тогда угол 2 должен быть больше угла 6 (§ 44), что противоречит условию; значит, пересечься в какой-нибудь точке p, лежащей направо от MN, прямые AB и CD не могут. Коли предположим, что пересечение будет в точке p', то тогда образуется треугольник, у которого угол 4, равный углу 2, будет внутренним, а угол 6 — внешним, не смежным с внутренним углом 4; тогда угол 6 должен быть больше угла 4 и, следовательно, больше угла 2, что противоречит условию. Значит, прямые AB и CD не могут пересечься и в точке, лежащей налево от MN; следовательно, эти прямые нигде не пересекаются, т. е. они параллельны. Подобным же образом доказывается, что $AB \| CD$, если $\angle 1 = \angle 5$ или $\angle 3 = \angle 7$ и т. д.

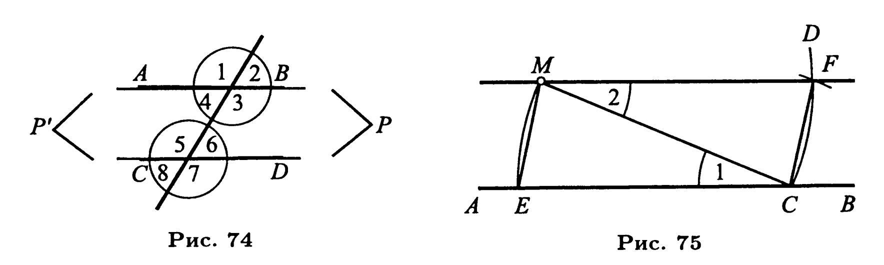


Рис. 74 Рис. 75

Пусть еще дано, что $\angle 4 + \angle 5 = 2d$. Тогда мы должны заключить, что $\angle 4 = \angle 6$, так как угол 6 в сумме с углом 5 тоже составляет $2d$. Но если $\angle 4 = \angle 6$, то прямые не могут пересечься, так как в противном случае углы 4 и 6 не могли бы быть равными (один был бы внешний, а другой внутренний, не смежный с ним).

74. Задача. *Через данную точку M* (рис. 75) *провести прямую, параллельную данной прямой AB.*

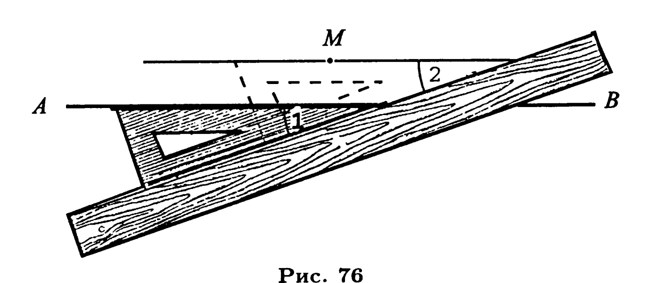


Рис. 76

Наиболее простое решение этой задачи состоит в следующем: описываем произвольным радиусом с центром в точке M дугу CD, далее описываем с центром в точке C тем же радиусом дугу ME. Затем, дав циркулю раствор, равный расстоянию от E до M, описываем небольшую дугу с центром в точке C, которая пересечется с CD в некоторой точке F. Прямая MF будет параллельна AB.

Для доказательства проведем вспомогательную прямую MC; образовавшиеся при этом углы 1 и 2 равны по построению (ибо треугольники EMC и MCF равны по трем сторонам), а если накрест лежащие углы равны, то линии параллельны.

Для построения параллельных прямых удобно пользоваться треугольником и линейкой, как это видно из рис. 76.

75. ***Аксиома параллельных линий. Через одну и ту же точку нельзя провести двух различных прямых, параллельных одной и той же прямой.***

Так, если (рис. 77) $CE \| AB$, то никакая другая прямая CE', проведенная через точку C, не может быть параллельной AB, т. е. CE' при продолжении пересечется с AB.

Доказать это предложение, т. е. вывести его как следствие из ранее принятых аксиом, оказывается невозможным. Поэтому приходится принимать его как некоторое новое допущение (постулат или аксиому).

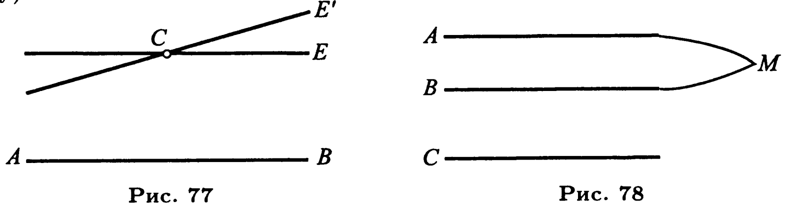


Рис. 77 **Рис. 78**

76. Следствия. 1) *Если $CE \| AB$ (рис. 77) и какая-нибудь третья прямая CE' пересекается с одной из этих двух параллельных, то она пересекается и с другой.* В противном случае через одну и ту же точку C проходили бы две различные прямые CE' и CE, параллельные AB, что невозможно.

2) *Если каждая из двух прямых A и B* (рис. 78) *параллельна одной и той же третьей прямой C, то они параллельны между собой.*

Действительно, если бы мы предположили, что прямые A и B пересекаются в некоторой точке M, то тогда через эту точку проходили бы две различные прямые, параллельные C, что невозможно.

77. Об углах, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, не параллельной двум данным.

Теорема (обратная теорема, § 73). ***Если две параллельные прямые*** (AB и CD, рис. 79) ***пересечены какой-нибудь прямой*** (MN), ***то***:

1) ***соответственные углы равны***;
2) ***накрест лежащие углы равны***;
3) ***сумма внутренних односторонних углов равна*** $2d$;
4) ***сумма внешних односторонних углов равна*** $2d$.

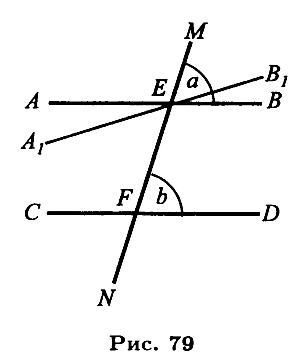


Рис. 79

Докажем, например, что если $AB \| CD$, то соответственные углы a и b равны.

Предположим противное, т.е. что эти углы не равны (например, пусть $\angle A > \angle b$). Построив $\angle MEB_1 = \angle b$, мы получим тогда прямую A_1B_1, не сливающуюся с AB, и, следовательно, будем иметь две различные прямые, проходящие через точку E и параллельные одной и той же прямой CD, именно: $AB \| CD$, согласно условию теоремы, и $A_1B_1 \| CD$ вследствие равенства соответственных углов MEB_1 и b. Так как это противоречит аксиоме параллельных линий, то наше предположение, что углы a и b не равны, должно быть отброшено; остается принять, что $\angle a = \angle b$.

Таким же путем можно доказать и остальные заключения теоремы. Из доказанных выше предложений непосредственно вытекает следующая теорема:

Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть также перпендикуляр и к другой.

Действительно, если $AB \| CD$ (рис. 80) и $ME \perp AB$, то, во-первых, ME, пересекаясь с AB, пересекается и с CD в некоторой точке F, во-вторых, соответственные углы a и b равны. Но угол a прямой, значит, и угол b прямой, т.е. $ME \perp CD$.

78. Признаки непараллельности прямых. Из двух теорем: прямой (§ 73) и ей обратной (§ 77) можно вывести заключение, что противоположные теоремы также верны, т.е.:

Если при пересечении двух прямых третьей окажется, что 1) ***соответственные углы не равны*** или 2) ***внутренние накрест лежащие углы не равны и т.д., то прямые не параллельны; если две прямые не параллельны, то при пересечении их третьей прямой*** 1) ***соответственные углы не равны***, 2) ***внутренние накрест лежащие углы не равны*** и т.д. Из этих признаков непараллельности (легко доказываемых способом от противного) полезно обратить особое внимание на следующий:

если сумма внутренних односторонних углов (a и b, рис. 81) ***не равна*** $2d$, ***то прямые*** (AB ***и*** CD) ***при достаточном продолжении пересекаются***, так как если бы эти прямые не пересекались, то они были бы параллельны, и тогда сумма внутренних односторонних углов равнялась бы $2d$, что противоречит условию.

Это предложение (дополненное утверждением, что прямые пересекутся по ту сторону от секущей линии, по которой сумма внутренних

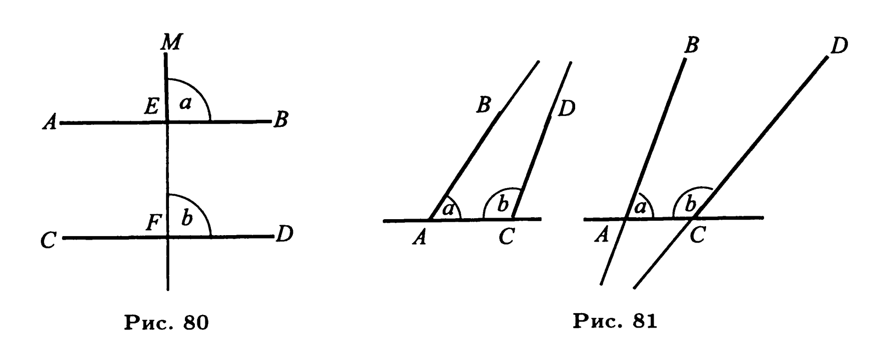


Рис. 80 Рис. 81

односторонних углов м е н ь ш е $2d$) было принято знаменитым греческим геометром Евклидом (жившим в III веке до нашей эры) в его «Началах» геометрии без доказательства как аксиома параллельных линий, и потому оно известно под именем **постулата Евклида**. В настоящее время предпочитают принимать за такую аксиому более простое предложение (§ 75). Укажем еще два следующих признака непараллельности, которые понадобятся нам впоследствии: 1) *Пер-*

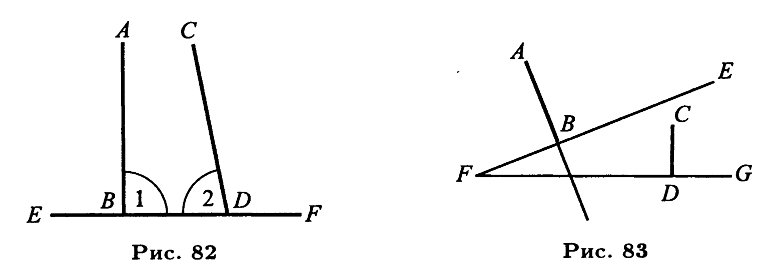


Рис. 82 Рис. 83

пендикуляр (AB, рис. 82) *и наклонная* (CD) *к одной и той же прямой* (EF) *пересекаются*, потому что сумма внутренних односторонних углов 1 и 2 не равна $2d$.

2) *Две прямые* (AB и CD, рис. 83), *перпендикулярные к двум пересекающимся прямым* (FE *и* FG), *пересекаются.*

Действительно, если предположим противное, т. е. что $AB \| CD$, то прямая FD, будучи перпендикулярна к одной из параллельных (к CD), была бы перпендикулярна и к другой параллельной (к AB), и тогда из одной точки F к прямой AB были бы проведены два перпендикуляра: FB и FD, что невозможно.

Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами

79. Т е о р е м а. ***Если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два прямых.***

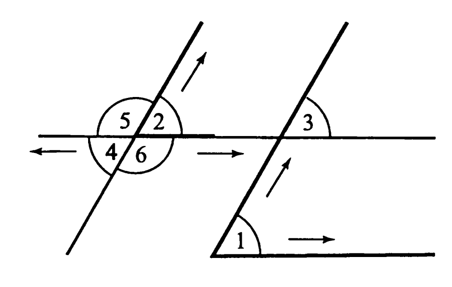


Рис. 84

Рассмотрим особо следующие три случая (рис. 84).

1) Пусть стороны угла 7 соответственно параллельны сторонам угла 2 и, сверх того, имеют одинаковое направление от вершины (на чертеже направления указаны стрелками).

Продолжив одну из сторон угла 2 до пересечения с непараллельной ей стороной угла 1, мы получим угол 3, равный и углу 1, и углу 2 (как соответственные при параллельных прямых); следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

2) Пусть стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам угла 4, но имеют противоположное направление от вершины.

Продолжив обе стороны угла 4, мы получим угол 2, который равен углу 1 (по доказанному выше) и углу 4 (как вертикальный ему); следовательно, $\angle 4 = \angle 1$.

3) Пусть, наконец, стороны угла 1 соответственно параллельны сторонам углов 5 и 6, причем две из этих сторон имеют одинаковое направление, а две другие — противоположное.

Продолжив одну сторону угла 5 или угла 6, мы получим угол 2, который равен (по доказанному) углу 1; но $\angle 5$ (или $\angle 6$) $+\angle 2 = 2d$ (по свойству смежных углов); следовательно, и $\angle 5$ (или $\angle 6$) $+ \angle 1 = 2d$.

Таким образом, углы с параллельными сторонами оказываются равными, когда их стороны имеют или одинаковое, или противоположное направление от вершины; если же это условие не выполнено, то углы составляют в сумме $2d$.

Замечание. Можно было бы сказать, что углы с параллельными сторонами равны тогда, когда они оба острые или оба тупые; но бывают случаи, когда по виду углов трудно определить, острые ли они или тупые; поэтому приходится сравнить направления сторон углов.

80. Теорема. ***Если стороны одного угла соответственно перпендикулярны к сторонам другого угла, то такие углы или равны, или в сумме составляют два прямых.***

Пусть угол ABC, обозначенный цифрой 1 (рис. 85), есть один из данных углов; за другой данный угол возьмем какой-нибудь из четырех углов: 2, 3, 4 или 5, образованных двумя пересекающимися прямыми, из которых одна перпендикулярна к стороне AB, а другая — к стороне BC (общая вершина их может находиться в любой точке плоскости).

Проведем из вершины угла 1 две вспомогательные прямые: $BD \perp BC$ и $BE \perp BA$. Образованный ими угол 6 равен углу 1 по следующей при-

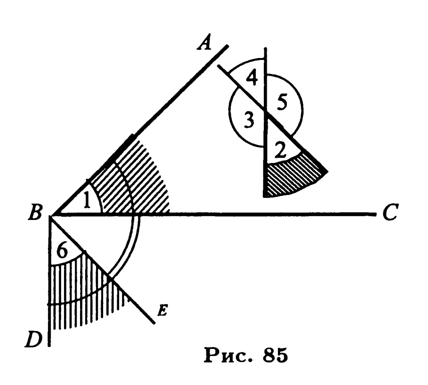


Рис. 85

чине: углы DBC и EBA равны, так как оба они прямые; отняв от каждого из них по одному и тому же углу EBC, получим: $\angle 6 = \angle 1$. Теперь заметим, что стороны вспомогательного угла 6 параллельны пересекающимся прямым, образующим углы 2, 3, 4 и 5 (потому что два перпендикуляра к одной прямой параллельны, § 71), следовательно, эти углы или равны углу 6, или составляют с ним в сумме $2d$. Заменив угол 6 равным ему углом 1, получим то, что требовалось доказать.

Сумма углов треугольника и многоугольника

81. Теорема. ***Сумма углов треугольника равна двум прямым углам.*** Пусть ABC (рис. 86) — какой-нибудь треугольник; требуется доказать, что сумма углов A, B и C равна $2d$, т.е. 180°. Продолжив сторону AC и проведя $CE \| AB$, найдем: $\angle A = \angle ECD$ (как углы, соответственные при параллельных), $\angle B = \angle BCE$ (как углы, накрест лежащие при параллельных); следовательно,

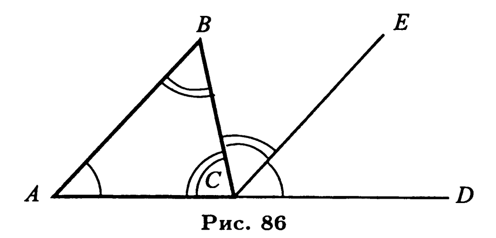


Рис. 86

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle ECD + \angle BCE + \angle C = 2d = 180°.$$

Следствия. 1) *Всякий внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним* (так, $\angle BCD = \angle A + \angle B$).

2) *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то и третьи углы равны.*

3) *Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна одному прямому углу, т. е.* 90°.

4) *В равнобедренном прямоугольном треугольнике каждый острый угол равен* $1/2\, d$, т. е. 45°.

5) *В равностороннем треугольнике каждый угол равен* $2/3\, d$, т. е. 60°.

6) *Если в прямоугольном треугольнике* ABC (рис. 87) *один из острых углов* (например $\angle B$) *равен* 30°, *то лежащий против него катет составляет половину гипотенузы.* Заметив, что в таком тре-

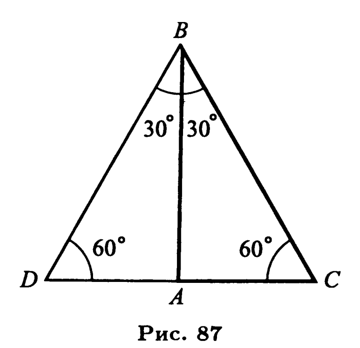


Рис. 87

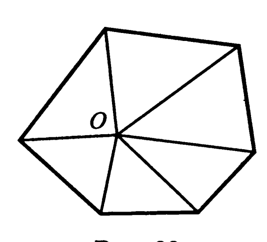


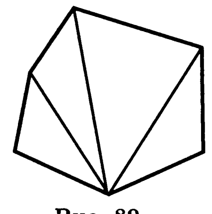
Рис. 88

угольнике другой острый угол равен 60°, пристроим к треугольнику ABC другой треугольник ABD, равный данному. Тогда мы получим треугольник DBC, у которого каждый угол равен 60°. Такой равноугольный треугольник должен быть равносторонним (§ 47), и потому $DC = BC$. Но $AC = \frac{1}{2}DC$, значит, $AC = \frac{1}{2}BC$.

Предоставляем самим учащимся доказать обратное предложение: если *катет равен половине гипотенузы, то противолежащий ему острый угол равен* 30°.

82. Теорема. ***Сумма углов выпуклого многоугольника, имеющего n сторон, равна двум прямым, повторенным $n-2$ раза.***

Взяв внутри выпуклого многоугольника произвольную точку O (рис. 88), соединим ее со всеми вершинами. Тогда выпуклый многоугольник разобьется на столько треугольников, сколько в нем сторон. Сумма углов каждого треугольника равна $2d$; следовательно, сумма углов всех треугольников равна $2dn$, если n означает число сторон многоугольника. Эта величина, очевидно, превышает сумму углов многоугольника на сумму всех тех углов, которые расположены вокруг точки 0; но эта сумма равна $4d$; следовательно, сумма углов многоугольника равна:


Рис. 89

$$2dn - 4d = 2d(n-2) = 180°(n-2).$$

Замечание. Эту теорему можно доказать еще и так. Из вершины какого-нибудь выпуклого многоугольника проведем его диагонали (рис. 89). Тогда многоугольник разобьется на столько треугольников, сколько в многоугольнике сторон без двух. Действительно, если не будем считать двух сторон, образующих угол, из вершины которого проведены диагонали, то на каждую из остальных сторон придется по одному треугольнику. Значит, всех треугольников будет $n-2$, где n означает число всех сторон многоугольника. Но в каждом треуголь-

нике сумма углов равна $2d$; значит, сумма углов всех треугольников будет $2d(n-2)$; но эта сумма и есть сумма всех углов многоугольника.

Примечание. Доказанная теорема верна и для вогнутых многоугольников. При этом, если внутри многоугольника можно найти такую точку, что отрезки прямых, соединяющие ее с вершинами многоугольника, лежат внутри него, то теорему можно доказать, повторяя дословно те рассуждения, которые мы приводили выше при первом способе доказательства. Если же такой точки найти нельзя, то следует весь многоугольник разбить на выпуклые многоугольники, проведя некоторые его диагонали, а затем подсчитать сумму углов в каждом из них и все эти суммы сложить. В результате получим ту же формулу $2dn-4d$. Этот подсчет мы предоставляем произвести самому читателю.

83. Теорема. ***Если из вершины каждого угла выпуклого многоугольника проведем продолжение одной из сторон этого угла, то сумма всех образовавшихся при этом внешних углов многоугольника равна четырем прямым*** (независимо от числа сторон многоугольника).

Каждый из таких внешних углов (рис. 90) составляет дополнение до $2d$ к смежному с ним внутреннему углу многоугольника; следовательно, если к сумме всех внутренних углов прибавим сумму всех внешних углов, то получим $2dn$ (где n — число сторон); но сумма внутренних углов, как мы видели, равна $2dn - 4d$; следовательно, сумма внешних углов равна разности:

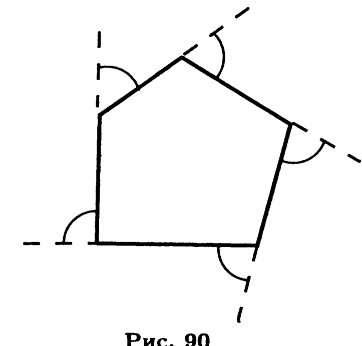


Рис. 90

$$2dn-(2dn-4d) = 2dn-2dn+4d = 4d = 360°.$$

Центральная симметрия

84. В § 37 был рассмотрен случай симметричного расположения двух равных фигур относительно прямой. Выведенные выше свойства параллельных прямых позволяют изучить еще один замечательный вид расположения двух равных фигур, или двух равных отрезков, или двух точек по отношению к некоторой точке на плоскости.

Если две какие-либо точки A и A' (рис. 91) расположены на одной прямой с точкой O по разные стороны от нее и на одинаковом от нее расстоянии ($OA = OA'$), то такие точки называются симметричными относительно точки (O).

Чтобы построить точку, симметричную с данной точкой A относительно другой данной точки O, следует соединить точки A и O прямой, продолжить эту прямую за точку O и отложить на ней от точки O отрезок OA', равный OA, таким образом, чтобы точки A

и A' были расположены по разные стороны относительно точки O. Точка A' будет искомой.

85. Теорема. ***Если для двух точек*** (A и B) ***какой-либо прямой*** (AB) ***построить симметричные им точки*** (A' и B') ***относительно некоторой точки*** O, ***то***:

1) ***Прямая, соединяющая точки*** A' ***и*** B', ***будет параллельна данной прямой*** (AB), ***причем отрезок*** AB ***равен отрезку*** $A'B'$.

2) ***Каждой точке данной прямой*** (AB) ***соответствует симметричная ей точка на построенной прямой*** $A'B'$.

Доказательство. 1) Треугольники AOB и $A'OB'$ равны (рис. 92), потому что у них $AO = A'O$ и $BO = B'O$ (по построению), $\angle AOB = \angle A'OB'$ (как вертикальные углы). Из равенства этих треугольников следует: $AO = A'B'$ и $\angle OAB = \angle OA'B'$, значит, $AB \| A'B'$ (§ 73, 2-й случай).

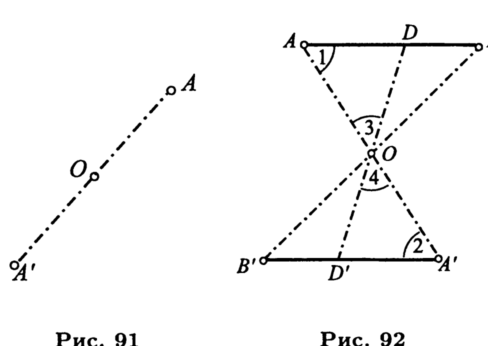


Рис. 91 Рис. 92

2) Возьмем на прямой AB какую-либо точку D (рис. 92). Рассмотрим прямую, соединяющую точку D с точкой O. Эта прямая пересечет прямую $A'B'$ в некоторой точке D'. Треугольники AOD и $A'OD'$ равны, потому что у них $AO = A'O$, $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных прямых) и $\angle 3 = \angle 4$ (как вертикальные). Из равенства этих треугольников следует: $OD = OD'$. Значит, точки D и D' симметричны относительно точки O.

86. Симметричные фигуры. ***Две фигуры называются симметричными относительно данной точки*** O, ***если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная ей точка другой фигуры.***

Точка O называется **центром симметрии** данных фигур. Сама симметрия называется центральной в отличие от осевой, с которой мы уже встречались раньше (§ 37). Если каждой точке данной фигуры соответствует симметричная ей точка той же самой фигуры (относительно некоторого центра), то говорят, что данная фигура имеет

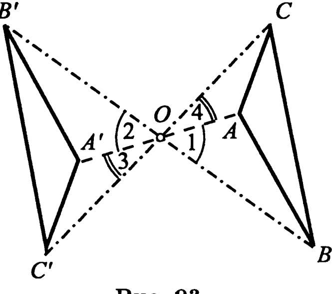


Рис. 93

центр симметрии. Примером такой фигуры служит окружность. Центром ее симметрии является ее центр.

Каждую фигуру можно совместить с фигурой, ей симметричной, путем вращения ее вокруг центра симметрии. В самом деле, возьмем, например, два треугольника ABC и $A'B'C'$ (рис. 93), симметричные относительно некоторого центра O.

Всю фигуру $OABC$, не отрывая от плоскости, будем вращать вокруг точки O как вокруг центра до тех пор, пока прямая OA не пойдет по OA'.

Так как $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, то прямая OB пойдет по OB', а прямая OC по OC'.

Так как $OA = OA'$, $OB = OB'$, $OC = OC'$, то точка A совпадает с A', точка B с B' и точка C с C'. Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A'B'C'$.

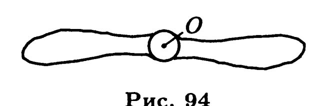


Рис. 94

Очевидно, что при таком повороте каждая прямая OA, OB, OC, а также каждая сторона треугольника ABC повернется на 180°. Если фигура имеет центр симметрии, то после поворота ее вокруг центра симметрии на 180° эта фигура совместится сама с собой.

Замечание. При вращении, которое мы произвели для совмещения треугольников ABC и $A'B'C'$, треугольник ABC скользил по плоскости. Таким образом, фигуры, симметричные относительно центра, можно совместить, не выводя их из плоскости. Этим центральная симметрия существенно отличается от осевой (§ 37), где для совмещения симметричных фигур необходимо было одну из них перевернуть другой стороной.

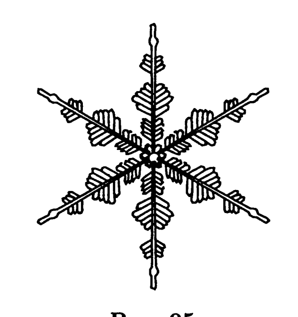


Рис. 95

Центральная симметрия фигур, так же как и осевая, весьма часто встречается в природе и в обыденной жизни. На рис. 94 приведено изображение пропеллера самолета. Оно имеет центром симметрии точку O. На рис. 95 дано изображение снежинки, оно также обладает центром симметрии.

6. ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ И ТРАПЕЦИИ

Параллелограммы

87. Параллелограмм. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом**. Такой четырехугольник ($ABCD$, рис. 96) получится, например, если какие-нибудь две параллельные прямые KL и MN пересечем двумя другими параллельными прямыми RS и PQ.

3—1568

88. Теорема (выражающая свойство сторон и углов параллелограмма). ***Во всяком параллелограмме противоположные стороны равны, противоположные углы равны и сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна*** $2d$ (рис. 97).

Проведя диагональ BD, мы получим два треугольника: ABD и BCD, которые равны, потому что у них BD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $AB = CD$, $AD = BC$

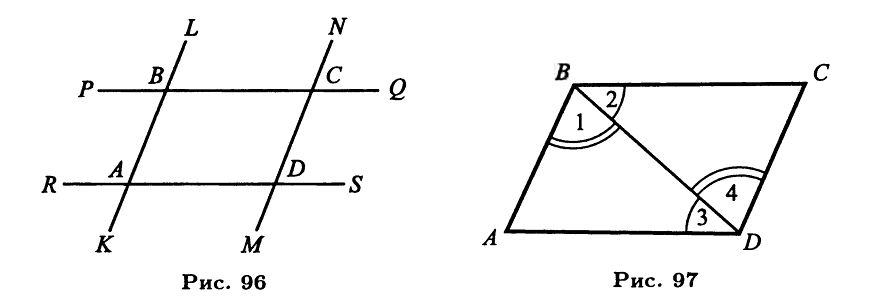


Рис. 96 **Рис. 97**

и $\angle A = \angle C$. Противоположные углы B и D также равны, так как они представляют собой суммы равных углов.

Наконец, углы, прилежащие к одной стороне, например углы A и D, дают в сумме $2d$, так как это углы внутренние односторонние при параллельных прямых.

Замечание. Равенство противоположных сторон параллелограмма иногда кратко выражают другими словами, так: *отрезки параллельных, отсекаемые параллельными, равны.*

Следствие. *Если две прямые параллельны, то все точки каждой из них одинаково удалены от другой параллельной*; короче: *параллельные прямые* (AB и CD рис. 98) *везде одинаково удалены одна от другой.*

Действительно, если из каких-нибудь двух точек M и N прямой CD опустим на AB перпендикуляры MP и NQ, то эти перпендикуляры параллельны (§ 71), и потому фигура $MNQP$ — параллелограмм; отсюда следует, что $MP = NQ$, т. е. точки M и N одинаково удалены от прямой AB.

89. Два признака параллелограммов.

Теорема. ***Если в выпуклом четырехугольнике***:

1) ***противоположные стороны равны между собой*** или

2) ***две противоположные стороны равны и параллельны, то такой четырехугольник есть параллелограмм.*** Пусть фигура $ABCD$ (рис. 99) есть четырехугольник, у которого:

$$AB = CD \quad \text{и} \quad BC = AD.$$

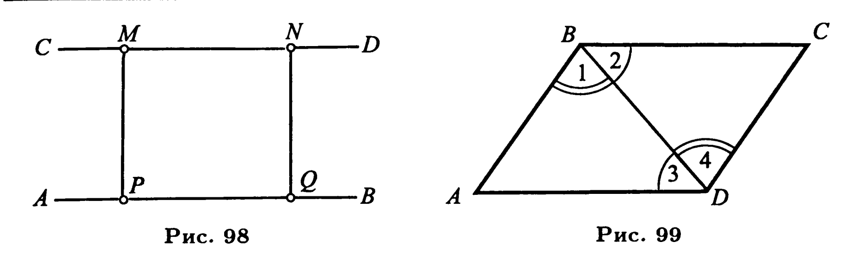


Рис. 98 Рис. 99

Требуется доказать, что эта фигура — параллелограмм, т.е. что $AB \| CD$ и $BC \| AD$. Проведя диагональ BD, мы получим два треугольника, которые равны, так как у них BD — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = AD$ (по условию). Из равенства этих треугольников следует: $\angle 1 = \angle 4$ и $\angle 2 = \angle 3$ (в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы); вследствие этого $AB \| CD$ и $BC \| AD$ (если накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны).

2) Пусть в четырехугольнике ($ABCD$, рис. 99) $BC \| AD$ и $BC = AD$. Требуется доказать, что $ABCD$ есть параллелограмм, т. е. что $AB \| CD$

Треугольники ABD и BCD равны, потому что у них BD — общая сторона, $BC = AD$ (по условию) и $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $\angle 1 = \angle 4$; поэтому $AB \| CD$.

90. Теорема (выражающая свойство диагоналей параллелограмма). ***Если четырехугольник*** ($ABCD$, рис. 100) — ***параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, делятся пополам.***

Обратно: ***если в четырехугольнике диагонали точкой их пересечения делятся пополам, то данный четырехугольник — параллелограмм.***

1) Треугольники BOC и AOD равны, потому что у них: $BC = AD$ (как противоположные стороны параллелограмма), $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ (как накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $OC = OA$ и $OB = OD$.

2) Если $AO = OC$ и $BO = OD$, то треугольники AOD и BOC равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует: $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, $BC \| AO$ (углы накрест лежащие равны) и $BC = AD$; поэтому фигура $ABCD$ есть параллелограмм.

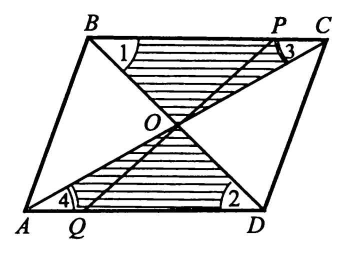


Рис. 100

91. ***Центр симметрии параллелограмма. Параллелограмм имеет центр симметрии***, причем центром симметрии служит точка пересечения диагоналей (рис. 100).

Действительно, так как $BO = OD$ и $OC = OA$, то отрезки BC и AD сим-

метричны относительно точки O и каждой точке P отрезка BC соответствует симметричная ей точка Q отрезка AD (§ 85). Таким же образом убеждаемся, что отрезки AB и CD симметричны относительно той же точки O. Если параллелограмм повернуть вокруг точки пересечения его диагоналей на $180°$, то новое положение параллелограмма совпадет с первоначальным. При этом каждая из его вершин поменяется местом с противоположной вершиной (на рис. 100 вершина A с C и B с D).

Некоторые частные виды параллелограммов: прямоугольник, ромб, квадрат

92. Прямоугольник и его свойства. Если один из углов параллелограмма прямой, то три остальных его угла также прямые (§ 88). Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется **прямоугольником**.

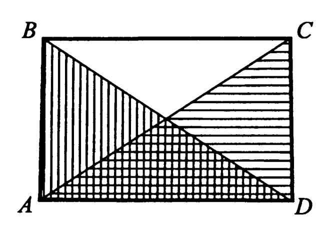


Рис. 101

Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми свойствами параллелограмма; например, диагонали его делятся пополам и точка их пересечения есть центр симметрии. Но у прямоугольника есть еще свои особые свойства.

1) *В прямоугольнике* ($ABCD$, рис. 101) *диагонали равны.*

Прямоугольные треугольники ACD и ABD равны, потому что у них: AD — общий катет и $AB = CD$ (как противоположные стороны параллелограмма). Из равенства треугольников следует: $AC = BD$.

2) *Прямоугольник имеет две оси симметрии.* Именно, каждая прямая, проходящая через центр симметрии прямоугольника и параллельная двум его противоположным сторонам, есть ось его симметрии. Оси симметрии прямоугольника перпендикулярны между собой (см. рис. 102).

93. Ромб и его свойства. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом. Конечно, ему принадлежат все свойства параллелограмма, но у него есть следующие два особых свойства:

1) ***Диагонали ромба*** ($ABCD$, рис. 103) ***взаимно перпендикулярны и делят углы ромба пополам.*** Треугольники ABO и BOC равны, потому что у них: BO — общая сторона, $AB = BC$ (так как у ромба все стороны равны) и $AO = OC$ (так как диагонали всякого параллелограмма делятся пополам). Из равенства треугольников следует:

$$\angle 1 = \angle 2, \quad \text{т.е} \quad BD \perp AC \quad \text{и} \quad \angle 3 = \angle 4,$$

т. е. угол B делится диагональю пополам. Из равенства треугольников BOC и COD заключаем, что угол C делится диагональю пополам,

и т. д.

2) ***Каждая диагональ ромба есть его ось симметрии.***

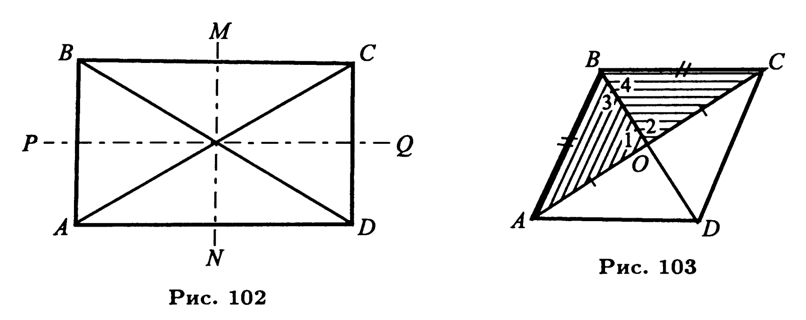


Рис. 102

Рис. 103

Диагональ BD (рис. 104) есть ось симметрии ромба $ABCD$, потому что, вращая $\triangle ABD$ вокруг BD, мы можем совместить его с $\triangle BCD$. В самом деле, диагональ BD делит углы B и D пополам и, кроме того, $AB = BC$ и $AD = CD$.

То же самое можно сказать о диагонали AC.

94. Квадрат и его свойства. Квадратом называется параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые; можно также сказать, что квадрат — это прямоугольник, у которого стороны равны, или ромб, у которого углы прямые. Поэтому квадрату принадлежат все свойства параллелограмма, прямоугольника и ромба. Например, у квадрата имеется четыре оси симметрии (рис. 105): две, проходящие через середины противоположных сторон (как у прямоугольника), и две, проходящие через вершины противоположных углов (как у ромба).

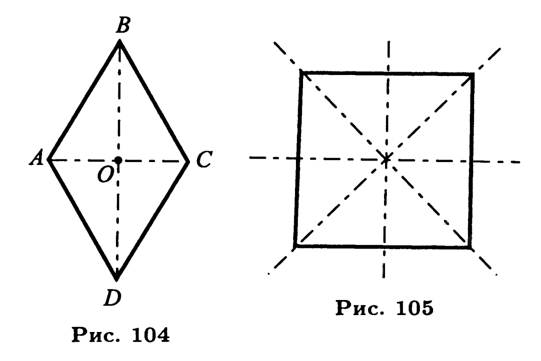


Рис. 104

Рис. 105

Некоторые теоремы, основанные на свойствах параллелограмма

95. Теорема. ***Если на одной стороне угла*** (например, на стороне BC угла ABC, рис. 106) ***отложим равные между собой отрезки*** ($DE = EF = \ldots$) ***и через их концы проведем параллельные прямые*** ($DM, EN, FP, \ldots$) ***до пересечения с другой стороной угла, то и на этой стороне отложатся равные между собой отрезки*** ($MN = NP = \ldots$). Проведем

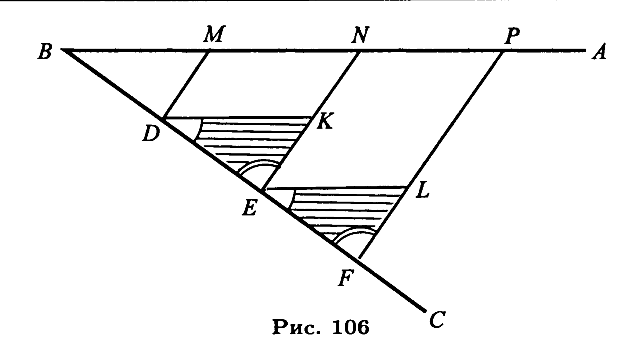


Рис. 106

вспомогательные прямые DK и EL, параллельные AB. Полученные при этом треугольники DKE и ELF равны, так как у них: $DE = EF$ (по условию), $\angle KDE = \angle LEF$ и $\angle KED = \angle LFE$ (как углы, соответственные при параллельных прямых). Из равенства этих треугольников следует: $DK = EL$. Но $DK = MN$ и $EL = NP$ (как противоположные стороны параллелограммов); значит, $MN = NP$.

Замечание. Равные отрезки могут быть откладываемы и от вершины угла B, т.е. так: $BD = DE = EF = \ldots$. Тогда и на другой стороне равные отрезки надо считать от вершины угла, т.е. так: $BM = MN = NP = \ldots$.

96. Следствие. *Прямая* (DE, рис. 107), *проведенная через середину стороны* (AB) *треугольника параллельно другой его стороне* (AC), *делит третью сторону* (BC) *пополам.*

Действительно, мы видим, что на стороне угла B отложены равные отрезки $BD = DA$ и через точки деления D и A проведены параллельные прямые DE и AC до пересечения со стороной BC; значит, по доказанному, на этой стороне тоже отложатся равные отрезки $BE = EC$, и потому BC разделится в точке E пополам.

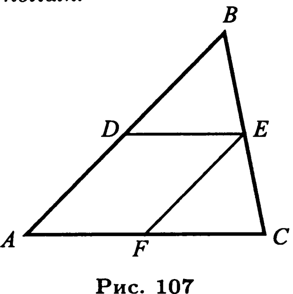


Рис. 107

Замечание. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его **средней линией**.

97. Теорема (выражающая свойство средней линии треугольника). ***Прямая*** (DE, рис. 107), ***проведенная через середины двух сторон треугольника, параллельна третьей его стороне; отрезок этой прямой, лежащий внутри треугольника, равен половине третьей стороны.***

Для доказательства вообразим, что через середину D стороны AB мы провели прямую, параллельную стороне AC. Тогда, по доказанному в предыдущем параграфе, эта прямая разделит сторону BC пополам и, следовательно, сольется с прямой DE, соединяющей середины сторон AB и BC.

Проведя еще $EF \| AD$, найдем, что сторона AC также разделится пополам в точке F; значит, $AF = FC$ и, кроме того, $AF = DE$ (как противоположные стороны параллелограмма $ADEF$), откуда следует:

$$DE = \frac{1}{2}AC.$$

Трапеции

98. Четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется **трапецией**. Параллельные стороны трапеции (AD и BC) называются **ее основаниями**, непараллельные (AB и CD) — боковыми сторонами (рис. 108). Если боковые стороны равны, трапеция называется **равнобочной**.

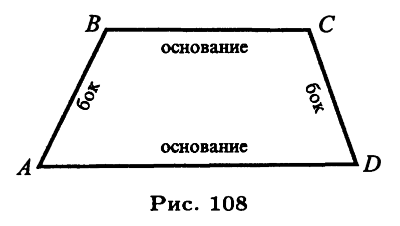


Рис. 108

99. Свойство средней линии трапеции. Прямая, соединяющая середины боковых сторон трапеции, называется **ее средней линией**. Линия эта обладает следующим свойством.

Теорема. ***Средняя линия** (EF, рис. 109) **трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.*** Через точки

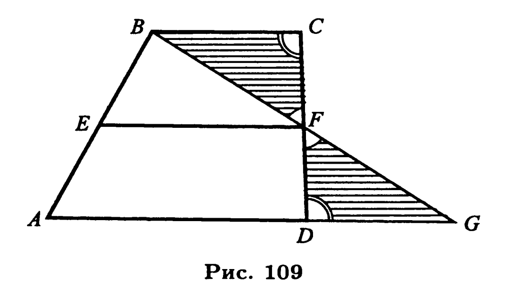


Рис. 109

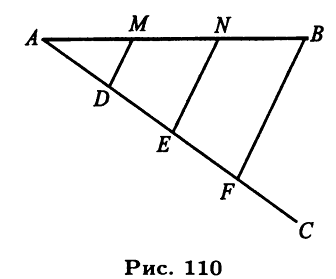


Рис. 110

B и F проведем прямую до пересечения с продолжением стороны AD в некоторой точке O. Тогда получим два треугольника: BCF и DFG, которые равны, так как у них: $CF = FD$ (по условию), $\angle BFC = \angle DFG$ (как углы вертикальные) и $\angle BCF = \angle FDG$ (как углы накрест лежащие при параллельных прямых). Из равенства треугольников следует: $BF = FG$ и $BC = DG$. Теперь видим, что в треугольнике ABG прямая EF соединяет середины двух сторон; значит (§ 97), $EF \| AG$ и $EF = \frac{1}{2}(AD+DG)$, другими словами, $EF \| AD$ и $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

100. Задача. *Данный отрезок прямой* (AB, рис. 110) *разделить на данное число равных частей* (например, на 3).

Из конца A проводим прямую AC, образующую с AB какой-нибудь угол; откладываем на AC от точки A три произвольной величины и равные между собой отрезка: AD, DE и EF; точку F соединяем с B; наконец, из E и D проводим прямые EN и DM, параллельные FB. Тогда отрезок AB, по доказанному, разделится в точках M и N на три равные части.

Задачи на построение

101. Метод параллельного перенесения. На применении свойств параллелограмма основан особый прием решения задач на построение, известный под названием метода параллельного перенесения. Его сущность лучше всего выяснить на примере.

Задача. *Построить четырехугольник* $ABCD$ (рис. 111), *зная все его стороны и отрезок* EF, *соединяющий середины противоположных сторон.*

Чтобы сблизить между собой данные линии, перенесем параллельно самим себе стороны AD и BC в положения ED_1 и EC_1. Тогда сторона DD_1 будет равна и параллельна AE, а сторона CC_1 равна и параллельна BE, но так как $AE = BE$, то $DD_1 = CC_l$ и $DD_1 \| CC_1$. Вследствие этого треугольники DD_1F и CC_1F будут равны (так как у них: $DD_1 = CC_1$, $DF = FC$ и $\angle D_1DF = \angle FCC_1$), значит, $\angle D_1FD = \angle CFC_1$ и потому линия D_1FC_1 должна быть прямая, т.е. фигура ED_1FC_1 окажется треугольником. В этом треугольнике известны две стороны ($ED_l = AD$ и $EC_1 = BC$) и медиана EF, проведенная к третьей стороне. По этим данным легко построить треугольник ED_1C_1 (если на продолжении медианы EF за точку F отложим отрезок, равный EF, и полученную точку соединим с D_1 и C_1, то получим параллелограмм, у которого известны стороны и одна диагональ).

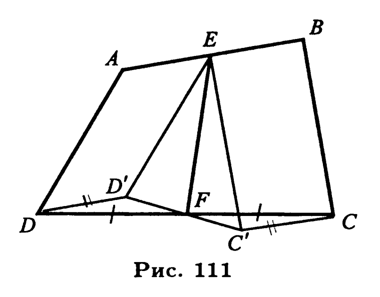


Рис. 111

Найдя $\triangle ED_1C_1$, строим затем треугольники D_1DF и C_1CF, а затем и весь четырехугольник $ABCD$.

Предоставляем самим учащимся с помощью этого метода решить следующие задачи:

1. Построить трапецию по одному ее углу, двум диагоналям и средней линии.
2. Построить четырехугольник по трем сторонам a, b, c и двум углам α и β, прилежащим к известной стороне.
3. Построить трапецию по четырем данным ее сторонам.

102. Метод симметрии. Свойства осевой симметрии также могут быть использованы при решении задач на построение. Иногда искомый прием построения легко обнаруживается, если перегнем часть чертежа вокруг некоторой прямой так, чтобы эта часть заняла симметричное положение по другую сторону от этой прямой. Приведем пример.

Задача. *На прямой AB* (рис. 112) *найти точку x, чтобы сумма ее расстояний от данных точек M и N была наименьшая.*

Если, перегнув чертеж вокруг AB, приведем точку M в симметричное относительно AB положение M_1, то расстояние точки M от какой угодно точки прямой AB равно расстоянию точки M_1 от той же точки прямой AB. Поэтому суммы $Mx+$ $+xN$, $Mx_l + x_1N\ldots$ равны соответственно суммам $M_1x + xN$, M_1x_1+ $+x_1N\ldots$; но из последних сумм наименьшая будет та, при которой линия M_1xN — прямая. Отсюда становится ясным прием построения.

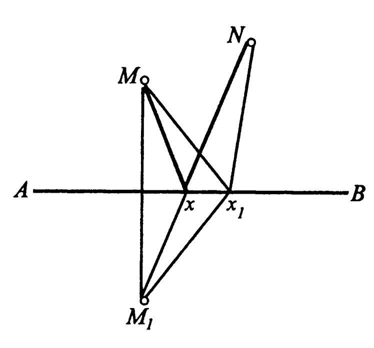


Рис. 112

То же самое построение решает и другую задачу: на прямой AB найти такую точку x, чтобы прямые xM и xN, проведенные от нее к данным точкам M и N, составляли с AB равные углы.

Предоставляем учащимся решить методом симметрии следующие задачи:

1. Построить по четырем сторонам четырехугольник $ABCD$, зная, что его диагональ AC делит угол a пополам.

2. На прямоугольном бильярде дано положение двух шаров A и B. В каком направлении надо толкнуть шар A, чтобы он, отразившись последовательно от всех четырех бортов, ударил затем шар B?

3. Дан угол и внутри него точка. Построить треугольник наименьшего периметра, такой, чтобы одна его вершина лежала в данной точке, а две другие на сторонах угла.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. Соединив последовательно середины сторон какого-нибудь четырехугольника, получим параллелограмм.

2. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

Указание. Следует продолжить медиану на расстояние, равное ее длине.

3. Обратно: если медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

4. В прямоугольном треугольнике медиана и высота, приведенные к гипотенузе, образуют угол, равный разности острых углов треугольника.

Указание. См. задачу 2.

5. В ΔABC биссектриса угла A встречает сторону BC в точке D; прямая, проведенная из D параллельно CA, встречает AB в точке E; прямая, проведенная из E параллельно BC, встречает AC в F. Доказать, что $EA = FC$.

6. Внутри данного угла построен другой угол, стороны которого параллельны сторонам данного и равно отстоят от них. Доказать, что биссектриса построенного угла лежит на биссектрисе данного угла.

7. Всякая прямая, соединяющая какую-нибудь точку нижнего основания трапеции с какой-нибудь точкой верхнего основания, делится средней линией пополам.

8. В треугольнике через точку пересечения биссектрис углов, прилежащих к основанию, проведена прямая параллельно основанию. Доказать, что отрезок прямой, заключенный между боковыми сторонами треугольника, равен сумме отрезков боковых сторон, считая их от основания.

9. Через вершины углов треугольника проведены прямые, параллельные противоположным сторонам. Доказать, что образованный ими треугольник составлен из четырех треугольников, равных данному, и что каждая сторона его в два раза более соответствующей стороны данного треугольника.

10. В равнобедренном треугольнике сумма расстояний каждой точки основания от боковых сторон есть величина постоянная, а именно: она равна высоте, опущенной на боковую сторону.

11. Как изменится эта теорема, если взять точку на продолжении основания?

12. В равностороннем треугольнике сумма расстояний всякой точки, взятой внутри этого треугольника, до сторон его есть величина постоянная, равная высоте треугольника.

13. Всякий параллелограмм, у которого диагонали равны, есть прямоугольник.

14. Всякий параллелограмм, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, есть ромб.

15. Всякий параллелограмм, у которого диагональ делит угол пополам, есть ромб.

16. Из точки пересечения диагоналей ромба опущены перпендикуляры на стороны ромба. Доказать, что основания этих перпендикуляров суть вершины прямоугольника.

Указание. См. задачу 13.

17. Биссектрисы углов прямоугольника своим пересечением образуют квадрат.

18. Пусть A', B', C' и D' будут середины сторон CD, DA, AB и BC квадрата. Доказать, что отрезки AA', CC', DD' и BB' образуют своим пересечением квадрат, сторона которого равна $2/5$ каждого из этих отрезков.

19. Дан квадрат $ABCD$. На сторонах его отложены равные части AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 соединены последовательно прямыми. Доказать, что $A_1B_1C_1D_1$ есть квадрат.

20. Если середины сторон какого угодно четырехугольника взять за вершины нового четырехугольника, то последний есть параллелограмм. Определить, при каких условиях этот параллелограмм будет: 1) прямоугольником, 2) ромбом, 3) квадратом.

Найти геометрические места

21. Середин всех отрезков, проведенных из данной точки к различным точкам данной прямой.

22. Точек, равно отстоящих от двух параллельных прямых.

23. Вершины треугольников, имеющих общее основание и равные высоты.

Задачи на построение

24. Даны два угла треугольника; построить третий.

25. Дан острый угол прямоугольного треугольника; построить другой острый угол.

26. Провести прямую, параллельную данной прямой и находящуюся от нее на данном расстоянии.

27. Разделить пополам угол, вершина которого не помещается на чертеже.

28. Через данную точку провести прямую под данным углом к данной прямой.

29. Даны две прямые XY и $X'Y'$ и точка P; провести через эту точку такую секущую, чтобы часть ее, заключенная между данными прямыми, делилась точкой P пополам.

30. Через данную точку провести прямую так, чтобы отрезок ее, заключенный между двумя данными параллельными прямыми, равнялся данному отрезку.

31. Между сторонами данного острого угла поместить отрезок данной длины так, чтобы он был перпендикулярен к одной стороне угла.

32. Между сторонами данного угла поместить отрезок прямой данной длины параллельно заданной прямой, пересекающей обе стороны данного угла.

33. Между сторонами данного угла поместить отрезок данной длины так, чтобы он отсекал от сторон угла равные отрезки.

34. Построить прямоугольный треугольник по данным: острому углу и противолежащему катету.

35. Построить треугольник по двум углам и стороне, лежащей против одного из них.

36. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и основанию.

37. То же — по углу при основании и высоте, опущенной на боковую сторону.

38. То же — по боковой стороне и высоте, опущенной на нее.

39. Построить равносторонний треугольник по его высоте.

40. Разделить прямой угол на три равные части (другими словами, построить угол, равный $1/3 = 30°$.

41. Построить треугольник по основанию, высоте и боковой стороне.

42. То же — по основанию, высоте и углу при основании.

43. То же — по углу и двум высотам, опущенным из стороны этого угла.

44. То же — по стороне, сумме двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

45. То же — по высоте, периметру и углу при основании.

46. Провести в треугольнике прямую, параллельную основанию, так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами, был равен сумме отрезков боковых сторон, считая от основания.

47. Построить многоугольник, равный данному.

Указание. Диагоналями разбивают данный многоугольник на треугольники.

48. Построить четырехугольник по трем его углам и двум сторонам, образующим четвертый угол.

Указание. Надо найти четвертый угол.

49. То же — по трем сторонам и двум диагоналям.

50. Построить параллелограмм по двум неравным сторонам и одной диагонали.

51. То же — по стороне и двум диагоналям.

52. То же — по двум диагоналям и углу между ними.

53. То же — по основанию, высоте и диагонали.

54. Построить прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями.

55. Построить ромб по стороне и диагонали.

56. То же — по двум диагоналям.

57. То же — по высоте и диагонали.

58. То же — по углу и диагонали, проходящей через этот угол.

59. То же — по диагонали и противолежащему углу.

60. То же — по сумме диагоналей и углу, образованному диагональю со стороной.

61. Построить квадрат по данной диагонали.

62. Построить трапецию по основанию, прилежащему к нему углу и двум непараллельным сторонам (могут быть два решения, одно и ни одного).

63. То же — по разности оснований, двум боковым сторонам и одной диагонали.

64. То же — по четырем сторонам (всегда ли задача возможна?).

65. То же — по основанию, высоте и двум диагоналям (условие возможности).

66. То же — по двум основаниям и двум диагоналям (условие возможности).

67. Построить квадрат по сумме стороны с диагональю.

68. То же — по разности диагонали и стороны.

69. Построить п а р а л л е л о г р а м м по двум диагоналям и высоте.

70. То же — по стороне, сумме диагоналей и углу между ними.

71. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

72. То же — по основанию, высоте и медиане, проведенной к боковой стороне.

73. Построить п р я м о у г о л ь н ы й треугольник по гипотенузе и сумме катетов (исследовать).

74. То же — по гипотенузе и разности катетов.

75. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой XY. Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины l так, чтобы ломаная $AM + MN + NB$ была наименьшей длины.

У к а з а н и е. Приблизим точку B к точке A, двигая ее по прямой, параллельной XY, на расстояние, равное MN.

Глава II

ОКРУЖНОСТЬ

1. ФОРМА И ПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

103. Предварительное замечание. Очевидно, что через одну точку (A, рис. 113) можно провести сколько угодно окружностей: центры их можно брать произвольно. Через две точки (A и B, рис. 114) тоже можно провести сколько угодно окружностей, но центры их нельзя брать произвольно, так как точки, одинаково удаленные от двух точек A и B, должны лежать на перпендикуляре, проведенном к отрезку AB, через его середину (§ 58).

Посмотрим теперь, можно ли провести окружность через три точки.

104. Теорема. **Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.**

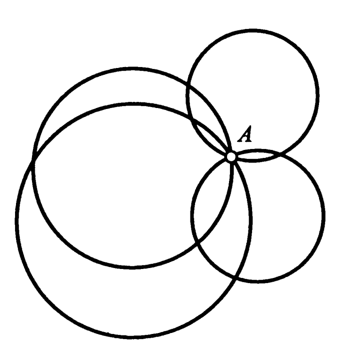


Рис. 113

Через три точки A, B, C (рис. 115), не лежащие на одной прямой (другими словами, через вершины $\triangle ABC$), только тогда можно провести окружность, если существует такая четвертая точка O, которая одинаково удалена от точек A, B и C. Докажем, что такая точка существует и притом только одна. Для этого примем во внимание, что всякая точка, одинаково удаленная от точек A и B, должна лежать на перпендикуляре MN, проведенном к стороне AB через ее середину (§ 58); точно так же всякая точка, одинаково удаленная от точек B и C, должна лежать на перпендикуляре PQ, проведенном к стороне BC через ее середину. Значит, если существует точка,

одинаково удаленная от трех точек A, B и C, то она должна лежать одновременно и на MN, и на PQ, что возможно только тогда, когда она совпадает с точкой пересечения этих двух прямых. Прямые MN и PQ всегда пересекаются, так как они перпендикулярны к пересекающимся прямым AB и BC (§ 78). Точка O их пересечения и будет точкой, одинаково удаленной от A, от B и от C; значит, если примем эту точку за центр, а за радиус возьмем отрезок OA (или OB, или OC), то окружность пройдет через точки A, B и C. Так как прямые MN и PQ могут пересечься только в одной точке, то центр такой окружности может быть только один, и длина ее радиуса может быть только одна; значит, искомая окружность — единственная.

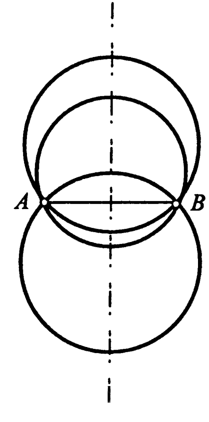


Рис. 114

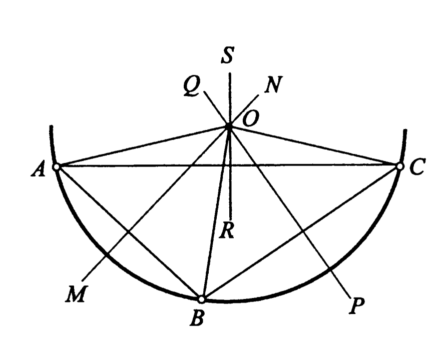


Рис. 115

З а м е ч а н и е. Если бы три точки A, B и C (рис. 115) лежали на одной прямой, то перпендикуляры MN и PQ были бы параллельны и, значит, не могли бы пересечься. Следовательно, через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружности.

С л е д с т в и е. Точка O (рис. 115), находясь на одинаковом расстоянии от A и от C, должна также лежать на перпендикуляре RS, проведенном к стороне AC через ее середину. Таким образом: *три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке.*

Рис. 116

105. Т е о р е м а. ***Диаметр*** (AB, рис. 116), ***перпендикулярный к хорде*** (CD), ***делит эту хорду и обе стягиваемые ею дуги пополам.***

Перегнем чертеж по диаметру AB так, чтобы его левая часть упала на правую. Тогда левая полуокружность совместится с правой полуокружностью, и перпендикуляр KC пойдет по KD. Из этого следует,

что точка C, представляющая собой пересечение полуокружности с KC, упадет на D; поэтому $CK = KD$; $\smile BC = \smile BD$; $\smile AC = \smile AD$.

106. Обратные теоремы. 1. ***Диаметр*** (AB), ***проведенный через середину хорды*** (CD), ***перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягиваемую ею, пополам*** (рис. 116).

2. ***Диаметр*** (AB), ***проведенный через середину дуги*** (CBD), ***перпендикулярен к хорде, стягивающей эту дугу, и делит ее пополам.***

Оба эти предложения легко доказываются от противного.

107. Теорема. ***Дуги*** (AC и BD, рис. 117), ***заключенные между параллельными хордами*** (AB ***и*** CD), ***равны.***

Перегнем чертеж по диаметру $EF \perp AB$. Тогда на основании предыдущей теоремы можно утверждать, что точка A упадет в B, точка C упадет в D и, следовательно, дуга AC совместится с дугой BD, т. е. эти дуги равны.

108. Задачи. 1) *Разделить данную дугу* (AB, рис. 118) *пополам.*

Соединив концы дуги хордой AB, опускаем на нее перпендикуляр из центра и продолжаем его до пересечения с дугой. По доказанному в предыдущей теореме, дуга AB разделится этим перпендикуляром пополам. Если же центр не известен, тогда к хорде AB следует провести перпендикуляр через ее середину.

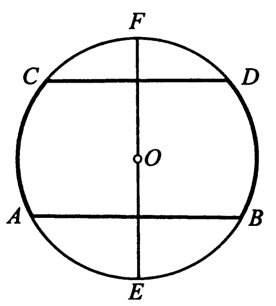


Рис. 117

2) *Найти центр данной окружности* (рис. 119).

Взяв на данной окружности какие-нибудь три точки A, B и C, проводят через них две хорды, например AB и CB, и через середины этих хорд проводят к ним перпендикуляры MN и PQ. Искомый центр, будучи одинаково удален от A, B и C, должен лежать и на MN и на PQ; следовательно, он находится в пересечении этих перпендикуляров, т. е. в точке O.

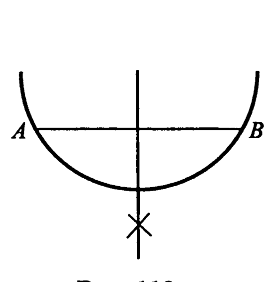


Рис. 118

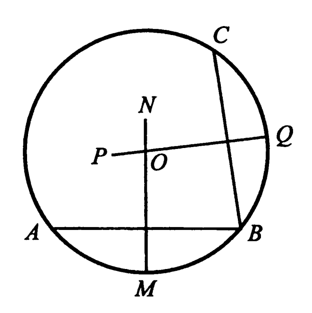


Рис. 119

2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДУГАМИ, ХОРДАМИ И РАССТОЯНИЯМИ ХОРД ОТ ЦЕНТРА

109. Теоремы. ***В одном круге или в равных кругах:***

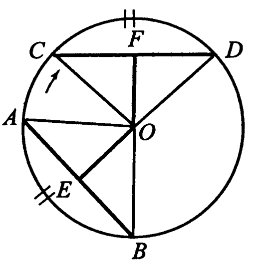
1) ***если дуги равны, то стягивающие их хорды равны и одинаково удалены от центра,***

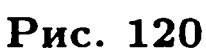
2) ***если две дуги, меньшие полуокружности, не равны, то бóльшая из них стягивается бóльшей хордой и из обеих хорд бóльшая расположена ближе к центру.***

1) Пусть дуга AB равна дуге CD (рис. 120), требуется доказать, что хорды AB и CD равны, а также равны перпендикуляры OE и OF, опущенные из центра на хорды.

Повернем сектор OAB вокруг центра O в направлении, указанном стрелкой, на столько, чтобы радиус OB совпал с OC. Тогда дуга BA пойдет по дуге CD и вследствие их равенства эти дуги совместятся. Значит, хорда AB совместится с хордой CD и перпендикуляр OE совпадет с OF (из одной точки можно опустить на прямую только один перпендикуляр), т. е. $AB = CD$ и $OE = OF$.

2) Пусть дуга AB (рис. 121) меньше дуги CD, и притом обе дуги меньше полуокружности; требуется доказать, что хорда AB меньше хорды CD, а перпендикуляр OE больше перпендикуляра OF. Отложим на дуге CD дугу CK, равную AB, и проведем вспомогательную хорду CK, которая, по доказанному, равна хорде AB и одинаково с ней удалена от центра. У треугольников COD и COK две стороны одного равны двум сторонам другого (как радиусы), а углы, заключенные между этими сторонами, не равны; в этом случае, как мы знаем (§ 52), против большего из углов, т. е. $\angle COD$, должна лежать большая сторона; значит, $CD > CK$, и потому $CD > AB$.




Рис. 120

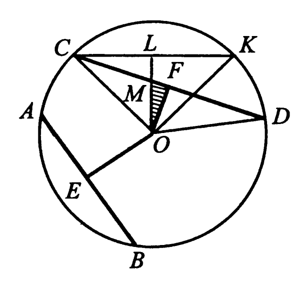


Рис. 121

Для доказательства того, что $OE > OF$, проведем $OL \perp CK$ и примем во внимание, что, по доказанному, $OE = OL$; следовательно, нам достаточно сравнить OF с OL. В прямоугольном треугольнике OFM (покрытом на чертеже штрихами) гипотенуза OM больше катета OF; но $OL > OM$; значит, и подавно $OL > OF$, и потому $OE > OF$.

Теорема, доказанная нами для одного круга, остается верной и для равных кругов, потому что такие круги один от другого отличаются только положением.

110. Обратные теоремы. Так как в предыдущем параграфе рассмотрены всевозможные взаимно исключающие случаи относительно сравнительной величины двух дуг одного радиуса, причем получились взаимно исключающие выводы относительно сравнительной величины хорд и расстояний их от центра, то обратные предложения должны быть верны, а именно:

В одном круге или в равных кругах:

1) ***равные хорды одинаково удалены от центра и стягивают равные дуги***;

2) ***хорды, одинаково удаленные от центра, равны и стягивают равные дуги***;

3) ***из двух неравных хорд бóльшая ближе к центру и стягивает бóльшую дугу***;

4) ***из двух хорд, неодинаково удаленных от центра, та, которая ближе к центру, больше и стягивает бóльшую дугу.***

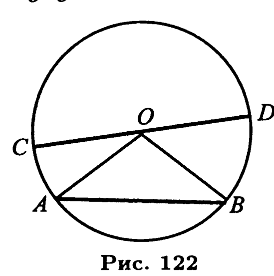


Рис. 122

Эти предложения легко доказываются от противного. Например, для доказательства первого из них рассуждаем так: если бы данные хорды стягивали неравные дуги, то, согласно прямой теореме, они были бы не равны, что противоречит условию; значит, равные хорды должны стягивать равные дуги; а если дуги равны, то, согласно прямой теореме, стягивающие их хорды одинаково удалены от центра.

111. Теорема. ***Диаметр есть наибольшая из хорд.*** Если соединим с центром O концы какой-нибудь хорды, не проходящей через центр, например хорды AB (рис. 122), то получим треугольник AOB, в котором одна сторона есть эта хорда, а две другие — радиусы. Но в треугольнике каждая сторона менее суммы двух других сторон; следовательно, хорда AB менее суммы двух радиусов, тогда как всякий диаметр CD равен сумме двух радиусов. Значит, диаметр больше всякой хорды, не проходящей через центр. Но так как диаметр есть тоже хорда, то можно сказать, что диаметр есть наибольшая из хорд.

3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

112. Прямая и окружность могут, очевидно, находиться только в следующих трех относительных положениях:

1) *Расстояние* (OC) *центра от прямой* (AB) (*т. е. длина перпендикуляра OC, опущенного из центра на прямую*) *больше радиуса окружности* (рис. 123). Тогда точка C прямой удалена от центра

больше, чем на радиус, и потому лежит вне круга. Так как все остальные точки прямой удалены от O еще более, чем точка C (наклонные длиннее перпендикуляра), то они все лежат вне круга; значит, тогда прямая не имеет никаких точек, общих с окружностью.

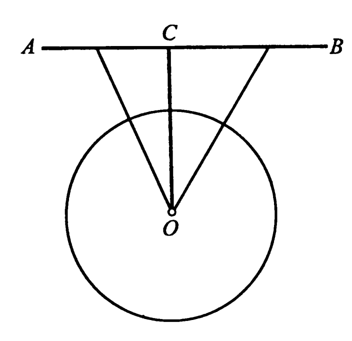


Рис. 123

2) *Расстояние* (OC) *центра от прямой меньше радиуса.* В этом случае (рис. 124) точка C лежит внутри круга, и тогда, очевидно, прямая с окружностью пересекается.

3) *Расстояние* (OC) *центра от прямой равно радиусу.* Тогда точка C (рис. 125) принадлежит и прямой и окружности, все же остальные точки прямой, будучи удалены от O более, чем точка C, лежат вне круга. Значит, в этом случае прямая и окружность имеют только одну общую точку, именно ту, которая служит основанием перпендикуляра, опущенного из центра на прямую.

Такая прямая, которая с окружностью имеет только одну общую точку, называется касательной к окружности; общая точка называется **точкой касания**.

113. Относительно касательной мы докажем следующие две теоремы (прямую и обратную) (рис. 126):

1) ***если прямая*** (MN) ***перпендикулярна к радиусу*** (OA) ***в конце его*** (A)***, лежащем на окружности, то она касается окружности,*** и обратно (рис. 126).

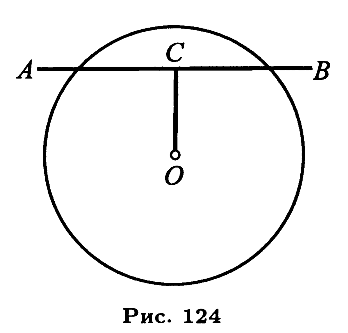


Рис. 124

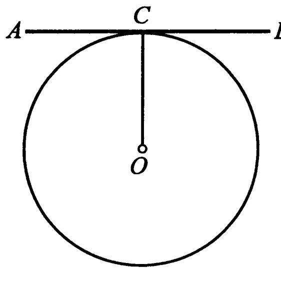


Рис. 125

2) **если прямая касается окружности, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к ней.**

1) Точка A, как конец радиуса, лежащий на окружности, принадлежит этой окружности; в то же время она принадлежит и прямой MN. Значит, эта точка есть общая у окружности и прямой. Все же остальные точки прямой MN, как B, C и другие, отстоят от центра O

дальше, чем на радиус (так как отрезки $OB, OC, \ldots$, как наклонные, больше перпендикуляра OA), и потому они лежат вне окружности. Таким образом, у прямой MN есть только одна точка (A), общая с окружностью, и, значит, прямая MN есть касательная.

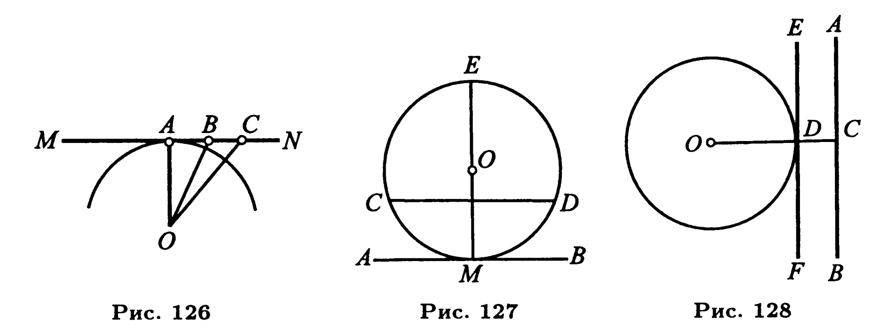


Рис. 126 **Рис. 127** **Рис. 128**

2) Если MN касается окружности в точке A, то все остальные точки этой прямой должны лежать вне окружности: вследствие этого отрезки $OB, OC, \ldots$ больше радиуса OA (точка O есть центр окружности). Значит, этот радиус есть н а и м е н ь ш и й из отрезков, соединяющих точку O с любой точкой прямой MN, и потому $OA \perp MN$.

114. Т е о р е м а. **Если касательная параллельна хорде, то точка касания делит дугу, стягиваемую хордой, пополам.**

Пусть прямая AB касается окружности в точке M (рис. 127) и параллельна хорде CD; требуется доказать, что $\smile CM = \smile MD$.

Проведя через точку касания диаметр ME, будем иметь: $EM \perp AB$ и, следовательно, $EM \perp CD$; поэтому $\smile CM = \smile MD$.

115. З а д а ч а. *Провести касательную к данной окружности O параллельно данной прямой AB* (рис. 128).

Опускаем на AB из центра O перпендикуляр OC и через точку D, в которой этот перпендикуляр пересекается с окружностью, проводим $EF \| AB$. Искомая касательная будет EF. Действительно, так как $OC \perp AB$ и $EF \| AB$, то $EF \perp OD$, а прямая, перпендикулярная к радиусу в конце его, лежащем на окружности, есть касательная.

116. Сопряжение дуги с прямой или с другой дугой. При вычерчивании прямых линий и дуг окружностей принято говорить, что прямая AB (рис. 129) и дуга окружности BC, сходящиеся в точке B, **сопряжены**, если в этой точке они касаются друг друга.

Две дуги AB и BC (рис. 130), сходящиеся в точке B, сопряжены, если в этой точке имеют общую касательную DE.

Для сопряжения прямой с дугой необходимо (§ 113), чтобы центр окружности, которой принадлежит дуга, лежал на перпендикуляре к прямой, восставленном из точки сопряжения.

Для сопряжения одной дуги с другой дугой необходимо (§ 113), чтобы центры двух окружностей, которым принадлежат дуги, лежали

на прямой, проходящей через точку сопряжения и перпендикулярной к общей касательной этих дуг. Сопряжение двух линий (прямой

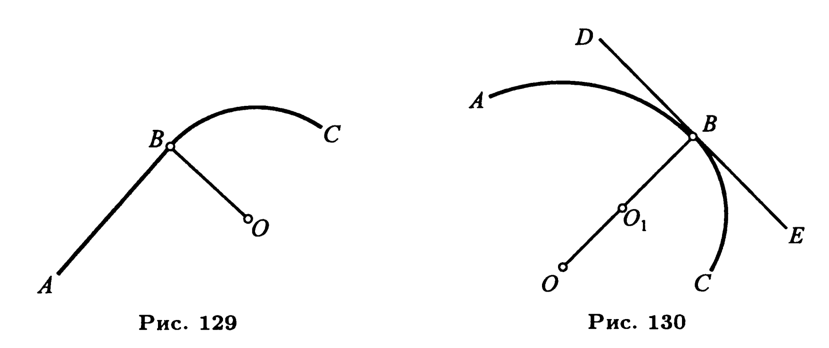


Рис. 129 Рис. 130

с дугой или двух дуг) делает переход с одной линии на другую плавным, без выступов; оно практикуется, например, при устройстве закруглений железнодорожных или трамвайных путей.

4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

117. Определение. Если две окружности имеют только одну общую точку, то говорят, что они **касаются**; если же две окружности имеют две общие точки, то говорят, что они **пересекаются**.

Трех общих точек две несливающиеся окружности иметь не могут, потому что в противном случае через три точки можно было бы провести две различные окружности, что невозможно (§ 104).

Будем называть линией центров бесконечную прямую, проходящую через центры двух окружностей.

118. Теорема. ***Если две окружности*** (рис. 131) ***имеют общую точку*** (A), ***расположенную вне линии центров, то они имеют еще и другую общую точку*** (A_1), ***симметричную с первой относительно линии центров*** (и, следовательно, такие окружности пересекаются).

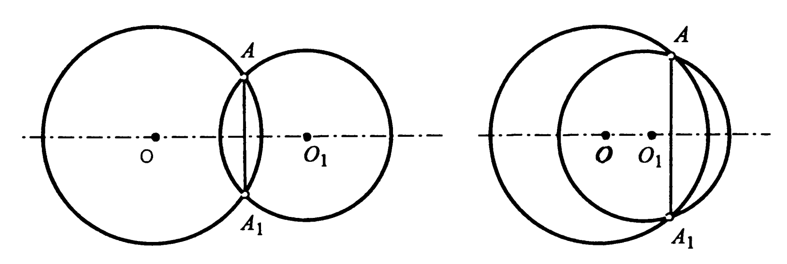


Рис. 131

Линия центров содержит в себе диаметры обеих окружностей и поэтому должна быть осью симметрии всей фигуры; поэтому общей точке A, лежащей вне линии центров, должна соответствовать симметричная общая точка A_1, расположенная по другую сторону от оси симметрии (на одном перпендикуляре к линии центров и на равном расстоянии от нее).

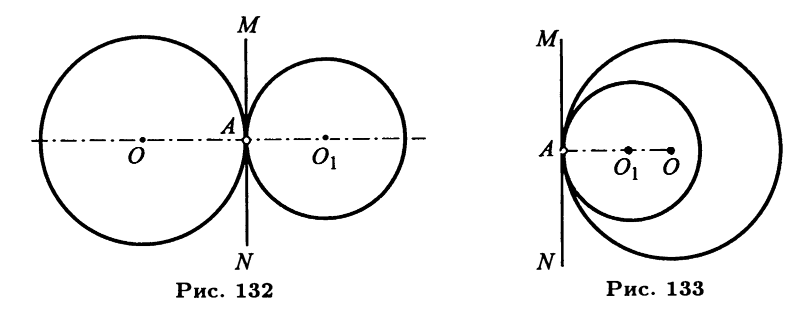


Рис. 132 Рис. 133

Следствие. *Общая хорда* (AA_1, рис. 131) *двух пересекающихся окружностей перпендикулярна к линии центров и делится ею пополам.*

119. Теорема. ***Если две окружности имеют общую точку*** (A) ***на линии их центров, то они касаются*** (рис. 132 и 133).

Окружности не могут иметь другой общей точки вне линии центров, потому что в противном случае они имели бы еще третью общую точку по другую сторону от линии центров и, следовательно, должны были бы слиться. Они не могут иметь другой общей точки и на линии центров, так как, имея на этой линии две общие точки, они должны были бы иметь и общую хорду, соединяющую эти точки. Но хорда, проходящая через центры, должна быть диаметром; если же окружности имеют общий диаметр, то они сливаются в одну окружность.

Замечание. Касание двух окружностей называется **внешним**, если окружности расположены одна вне другой (рис. 132), и внутренним, если одна из окружностей лежит внутри другой (рис. 133).

120. Теорема (обратная предыдущей). ***Если две окружности касаются*** (в точке A, рис. 132 и 133), ***то точка касания лежит на линии центров.***

Точка A не может лежать вне линии центров, потому что в противном случае окружности имели бы еще другую общую точку, что противоречит условию теоремы.

121. Следствие. *Две касающиеся окружности имеют общую касательную в точке касания,* потому что, если проведем через точку касания прямую MN (рис. 132 и 133), перпендикулярную к радиусу OA, то эта прямая будет также перпендикулярна и к радиусу O_1A.

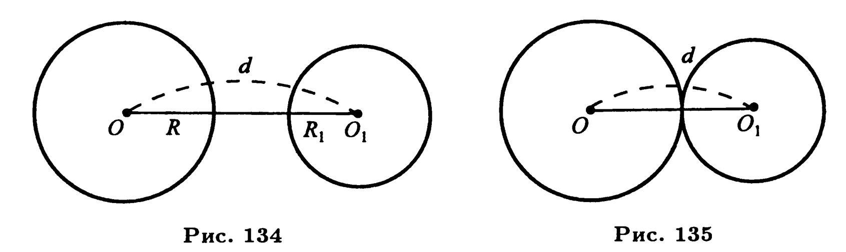


Рис. 134 **Рис. 135**

122. Различные случаи взаимного расположения двух окружностей. Обозначим радиусы двух окружностей буквами R и R_1 и расстояние между их центрами буквой d. Рассмотрим, какова зависимость между этими величинами в различных случаях взаимного расположения двух окружностей. Этих случаев можно указать пять, а именно:

1) Окружности лежат одна вне другой, не касаясь (рис. 134); в этом случае, очевидно, $d > R + R_1$.

2) Окружности имеют внешнее касание (рис. 135); тогда $d = R + R_1$, так как точка касания лежит на линии центров.

3) Окружности пересекаются (рис. 131); тогда $d < R + R_1$ и в то же время $d > R - R_1$, потому что в $\triangle OAO_1$*) сторона OO_1, равная d, меньше суммы, но больше разности двух других сторон, равных радиусам R и R_1.

4) Окружности имеют внутреннее касание (рис. 133); в этом случае $d = R - R_1$, потому что точка касания лежит на линии центров.

5) Одна окружность лежит внутри другой, не касаясь (рис. 136); тогда, очевидно, $d < R - R_1$, и в частном случае $d = 0$, когда центры обеих окружностей сливаются (такие окружности называются концентрическими).

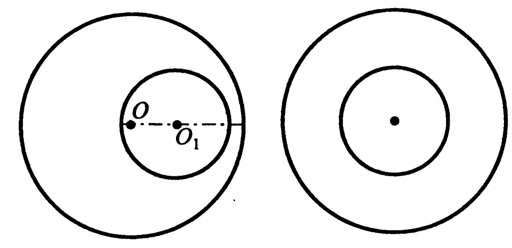


Рис. 136

Замечание. Учащимся предлагается проверить правильность обратных предложений, а именно:

1) *Если $d > R + R_1$, то окружности расположены одна вне другой, не касаясь.*

2) *Если $d = R + R_1$, то окружности касаются извне.*

3) *Если $d < R + R_1$, и в то же время $d > R - R_1$, то окружности пересекаются.*

---

*) На рис. 131 провести прямые OA и O_1A.

4) *Если* $d = R - R_1$, *то окружности касаются изнутри.*

5) *Если* $d < R - R_l$, *то одна окружность лежит внутри другой, не касаясь.*

Все эти предложения легко доказываются от противного.

5. ВПИСАННЫЕ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ УГЛЫ. ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

123. Вписанный угол. Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется **вписанным** углом. Таков, например, угол ABC (рис. 137).

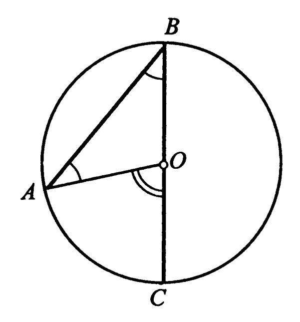


Рис. 137

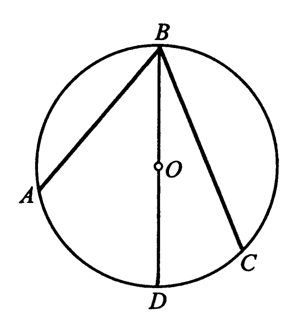


Рис. 138

О вписанном угле принято говорить, что он опирается на дугу, заключенную между его сторонами. Так, угол ABC **опирается** на дугу AC.

124. Теорема. **Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается**. Эту теорему надо понимать так: вписанный угол содержит в себе столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд заключается в половине дуги, на которую он опирается.

При доказательстве теоремы рассмотрим особо три случая:

1) Центр O (рис. 137) лежит на стороне вписанного угла ABC. Проведя радиус AO, мы получим $\triangle AOB$, в котором $OA = OB$ (как радиусы), и, следовательно, $\angle ABO = \angle BAO$. По отношению к этому треугольнику угол AOC есть внешний, поэтому он равен сумме углов ABO и BAO и, значит, равен двум углам ABO; поэтому угол ABO равен половине центрального угла AOC. Но угол AOC измеряется дугой AC, т. е. он содержит в себе столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд содержится в дуге AC; следовательно, вписанный угол ABC измеряется половиной дуги AC.

2) Центр O лежит между сторонами вписанного угла ABC (рис.138)

Проведя диаметр BD, мы разделим угол ABC на два угла, из которых, по доказанному, один измеряется половиной дуги AD, а другой — половиной дуги DC; следовательно, угол ABC измеряется суммой $\frac{1}{2}\smile AD + \frac{1}{2}\smile DC$, а эта сумма равна

$$\frac{1}{2}(\smile AD + \smile DC), \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2}\smile AC.$$

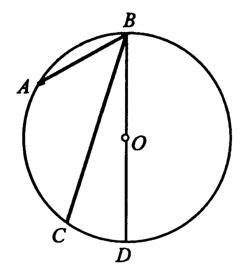


Рис. 139

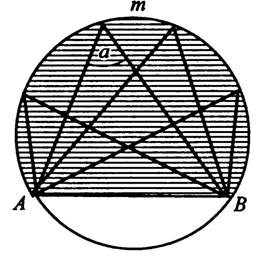


Рис. 140

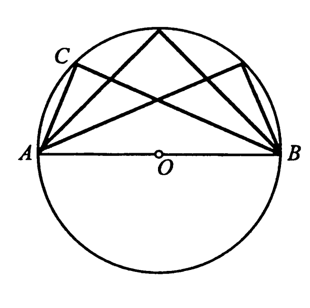


Рис. 141

3) Центр O лежит вне вписанного угла ABC (рис. 139). Проведя диаметр BD, мы будем иметь:

$$\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD.$$

Но углы ABD и CBD измеряются, по доказанному, половинами дуг AD и CD; следовательно, угол ABC измеряется разностью $\frac{1}{2}\smile AD - \frac{1}{2}\smile CD$, а эта разность равна $\frac{1}{2}(\smile AD - \smile CD)$, т. е. $\frac{1}{2}\smile AC$.

125. Следствия. 1) *Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой* (рис. 140), потому что каждый из них измеряется половиной одной и той же дуги. Если величину одного из таких углов обозначим a, то можно сказать, что сегмент AmB, покрытый на чертеже штрихами, вмещает в себя угол, равный a.

2) *Всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, есть прямой* (рис. 141), потому что каждый такой угол измеряется половиной полуокружности и, следовательно, содержит 90°.

126. Задача. *Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе a и катету b* (рис. 142).

На какой-нибудь прямой MN отложим $AB = a$, на AB опишем полуокружность. Затем проводим дугу радиусом, равным b, с центром в точке A (или B).

Точку пересечения C полуокружности и дуги соединим с концами диаметра AB. Треугольник ABC будет искомый, так как угол C — прямой, a является гипотенузой, а b — катетом.

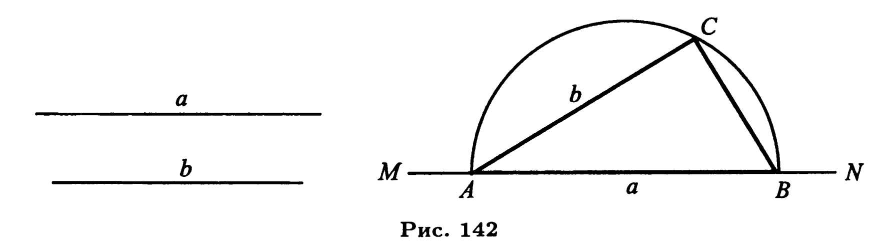


Рис. 142

127. Задача. *Из конца A (рис. 143) данного луча AB, не продолжая его, восставить к нему перпендикуляр.*

Возьмем вне прямой какую-либо точку O так, чтобы окружность с центром в этой точке и радиусом, равным отрезку OA, пересекла луч AB в какой-либо точке C. Через эту точку C проведем диаметр CD и конец его D соединим с A. Прямая AD есть искомый перпендикуляр, потому что угол A прямой, как вписанный и опирающийся на диаметр.

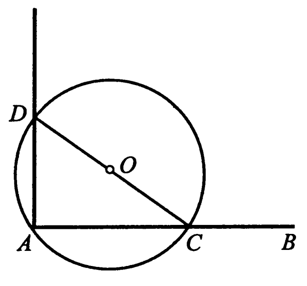


Рис. 143

128. Задача. *Через данную точку провести к данной окружности касательную.* Рассмотрим два случая:

1) Данная точка (C, рис. 144) лежит на самой окружности. Тогда через нее проводим радиус и через конец его C строим перпендикуляр AB к этому радиусу (так, как указано в предыдущей задаче).

2) Данная точка (A, рис. 145) лежит вне окружности (центра O). Тогда, соединив A с O, делим AO пополам в точке O_1 и с центром в этой точке радиусом OO_1 описываем окружность. Через точки B и B_1, в которых эта окружность пересекается с данной, проводим прямые AB и AB_1. Эти прямые и будут касательными, так как углы OBA и OB_1A, как опирающиеся на диаметр, — прямые.

Следствие. *Две касательные, проведенные к окружности из точки вне ее, равны и образуют равные углы с прямой, соединяющей эту точку с центром*, что следует из равенства прямоугольных треугольников AOB и AOB_1 (рис. 145).

129. Задача. *К двум окружностям O и O_1 провести общую касательную* (рис. 146).

1) Анализ. Предположим, что задача решена. Пусть AB будет общая касательная, A и B — точки касания. Очевидно, что если мы найдем одну из этих точек, например A, то затем легко найдем и другую. Проведем радиусы OA и O_1B. Эти радиусы, будучи перпендикулярны к общей касательной, параллельны между собой; поэтому, если из O_1 проведем $O_1C \| BA$, то треугольник OCO_1 будет

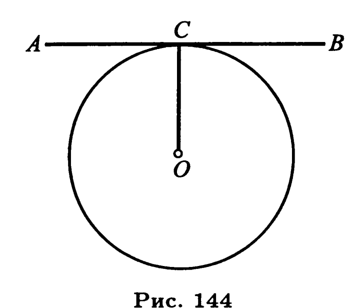


Рис. 144

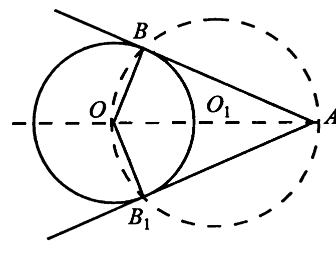


Рис. 145

прямоугольный с прямым углом при вершине C; вследствие этого, если опишем с центром в точке O радиусом OC окружность, то она будет касаться прямой O_1C в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности известен: он равен $OA - CA = OA - O_1B$, т. е. он равен разности радиусов данных окружностей.

Построение. Таким образом, построение можно выполнить так: описываем окружность с центром в точке O радиусом, равным разности данных радиусов; из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C (способом, указанным в предыдущей задаче); через точку касания C проводим радиус OC и продолжаем его до встречи с данной окружностью в точке A. Наконец, из A проводим AB параллельно CO_1.

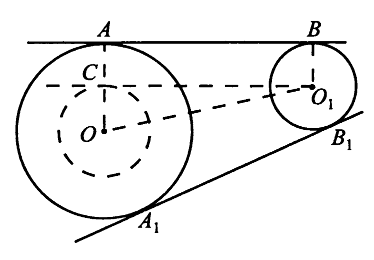


Рис. 146

Совершенно таким же способом мы можем построить другую общую касательную A_1B_1. Прямые AB и A_1B_1 называются **внешними** общими касательными двух окружностей.

Можно еще провести две внутренние касательные следующим образом (рис. 147).

2) Анализ. Предположим, что задача решена. Пусть AB будет искомая касательная. Проведем радиусы OA и O_1B в точки касания A и B. Эти радиусы, будучи оба перпендикулярны к общей касательной, параллельны между собой.

Поэтому, если из O_1 проведем $O_1C \| BA$ и продолжим OA до пересечения с O_1C в точке C, то OC будет перпендикулярен к O_1C, вследствие этого окружность, описанная радиусом OC с центром в точке O, будет касаться прямой O_1C в точке C. Радиус этой вспомогательной окружности известен, он равен: $OA + AC = OA + O_1B_1$, т. е. он равен сумме радиусов данных окружностей.

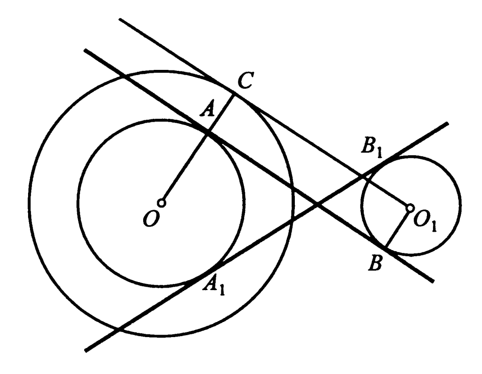


Рис. 147

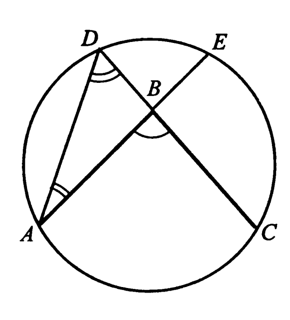


Рис. 148

Построение. Таким образом, построение может быть выполнено так: описываем окружность с центром в точке O радиусом, равным сумме данных радиусов; из O_1 проводим к этой окружности касательную O_1C; точку касания C соединяем с O; наконец, через точку A, в которой OC пересекается с данной окружностью, проводим $AB \| CO_1$. Подобным же способом можно построить и другую общую внутреннюю касательную A_1B_1

130. Теорема. 1) ***Угол*** (ABC, рис. 148), ***вершина которого лежит внутри круга, измеряется полусуммой двух дуг*** (AC ***и*** DE), ***из которых одна заключена между его сторонами, а другая — между продолжениями сторон.***

2) ***Угол*** (ABC, рис. 149), ***вершина которого лежит вне круга и стороны пересекаются с окружностью, измеряется полуразностью двух дуг*** (AC ***и*** ED), ***заключенных между его сторонами.***

Проведя хорду AD (на том и на другом чертеже), мы получим $\triangle ABD$, относительно которого рассматриваемый угол ABC служит внешним, когда его вершина лежит внутри круга, и внутренним, когда его вершина лежит вне круга. Поэтому в первом случае: $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$; во втором случае: $\angle ABC = \angle ADC - \angle DAE$.

Но углы ADC и DAE, как вписанные, измеряются половинами дуг AC и DE, поэтому угол ABC измеряется: в первом случае суммой $\frac{1}{2}\smile AC + \frac{1}{2}\smile DE$, которая равна $\frac{1}{2}(\smile AC + \smile DE)$, а во втором случае разностью $\frac{1}{2}\smile AC - \frac{1}{2}\smile DE$, которая равна $\frac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$.

131. Теорема. ***Угол*** (ACD, рис. 150 и 151), ***составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него.***

Предположим сначала, что хорда CD проходит через центр O, т. е. что эта хорда есть диаметр (рис. 150). Тогда угол ACD — прямой и,

следовательно, равен 90° . Но и половина дуги CmD также равна 90°, так как целая дуга CmD, составляя полуокружность, содержит 180°. Значит, теорема оправдывается в этом частном случае.

Теперь возьмем общий случай (рис. 151), когда хорда CD не проходит через центр. Проведя тогда диаметр CE, мы будем иметь:

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE.$$

Угол ACE, как составленный касательной и диаметром, измеряется, по доказанному, половиной дуги CDE; угол DCE, как вписанный, измеряется половиной дуги DE; следовательно, угол ACD измеряется разностью $\frac{1}{2}\smile CDE - \frac{1}{2}\smile DE$, т. е. половиной дуги CD.

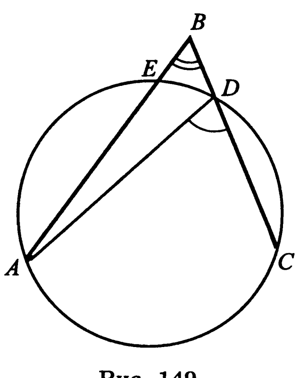


Рис. 149

Подобным же образом можно доказать, что тупой угол BCD (рис. 151), также составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги $CnED$; разница в доказательстве только та, что этот угол надо рассматривать не как разность, а как сумму прямого угла BCE и острого ECD.

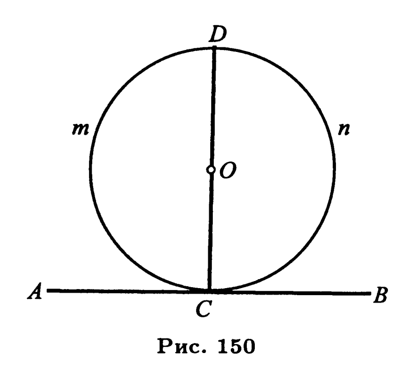


Рис. 150

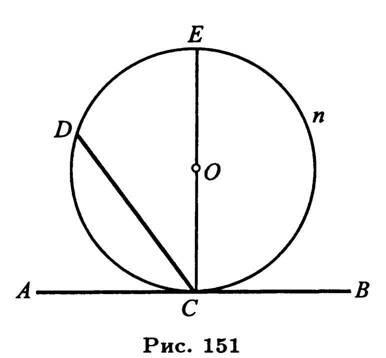


Рис. 151

132. З а д а ч а. *На данном отрезке AB построить сегмент, вмещающий данный угол a* (рис. 152).

А н а л и з. Предположим, что задача решена; пусть сегмент AmB будет такой, который вмещает в себя угол a, т. е. такой, что всякий вписанный в него угол ACB равен a. Проведем вспомогательную прямую AE, касательную к окружности в точке A. Тогда угол BAE, составленный касательной и хордой, должен равняться вписанному углу ACB, так как и тот, и другой угол измеряется половиной дуги

AnB. Примем теперь во внимание, что центр O окружности должен лежать на перпендикуляре DO, проведенном к отрезку AB через его середину, и в то же время он должен лежать и на перпендикуляре AO, восставленном к касательной AE из точки касания. Отсюда выводим следующее построение.

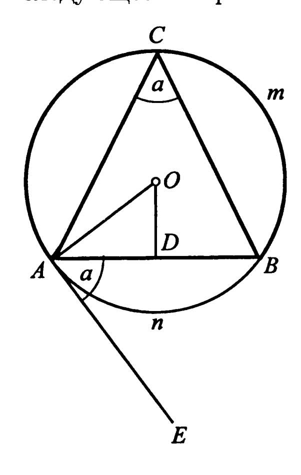


Рис. 152

Построение. При конце отрезка AB строим угол BAE, равный углу a; через середину AB проводим перпендикуляр DO и из точки A восставляем перпендикуляр к AE; точку пересечения O этих двух перпендикуляров принимаем за центр и радиусом AO описываем окружность.

Доказательство. Сегмент AmB будет искомый, потому что всякий вписанный в него угол измеряется половиной дуги AnB, а половина этой дуги измеряет также и угол $BAE = a$.

Замечание. На рис. 152 построен сегмент, расположенный выше отрезка AB. Такой же сегмент может быть построен и по другую сторону отрезка AB. Таким образом, можно сказать, что *геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом a, состоит из дуг двух сегментов, из которых каждый вмещает в себя угол a и один расположен по одну сторону отрезка AB, а другой — по другую сторону.*

Задачи на построение

133. Метод геометрических мест. Для решения многих задач на построение можно с успехом применять понятие о геометрическом месте и основанный на нем метод геометрических мест. Этот метод, известный еще со времен Платона (IV век до нашей эры), состоит в следующем. Положим, что решение предложенной задачи сводится к нахождению некоторой точки, которая должна удовлетворять известным условиям. Отбросим из этих условий какое-нибудь одно; тогда задача сделается неопределенной, т. е. ей может удовлетворять бесчисленное множество точек. Эти точки составят некоторое геометрическое место. Построим его, если это окажется возможным. Затем примем во внимание отброшенное нами условие и откинем какое-нибудь другое; тогда задача будет снова удовлетворяться бесчисленным множеством точек, которые составят новое геометрическое место. Построим его, если это возможно. Искомая точка, удовлетворяя всем условиям, должна лежать на обоих геометрических местах, т. е. она должна находиться в их пересечении. Задача окажется возможной или невозможной, смотря по тому, пересекаются или нет найденные

геометрические места; и задача будет иметь столько решений, сколько окажется точек пересечения. Приведем на этот метод один пример, который вместе с тем покажет нам, как иногда приходится вводить в чертеж вспомогательные линии с целью принять во внимание все данные условия задачи.

134. Задача. *Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и сумме s боковых сторон.*

Пусть ABC будет искомый треугольник (рис. 153). Чтобы принять во внимание данную сумму боковых сторон, продолжим BA и отложим $BM = s$. Проведя MC, получим вспомогательный треугольник BMC. Если мы построим этот треугольник, то затем легко построить искомый треугольник ABC.

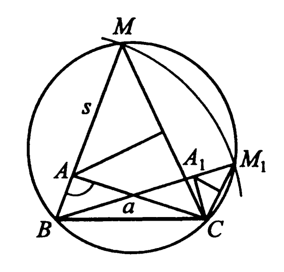


Рис. 153

Построение треугольника BMC сводится к нахождению точки M.

Заметив, что треугольник AMC равнобедренный ($AM = AC$) и, следовательно, $\angle M = \frac{1}{2}\angle BAC$ (так как $\angle M + \angle MCA = \angle BAC$), мы видим, что точка M должна удовлетворять двум условиям: 1) она удалена от B на расстояние s, 2) из нее данный отрезок BC виден под углом, равным $\frac{1}{2}\angle A$. Отбросив второе условие, мы получим бесчисленное множество точек M, лежащих на окружности, описанной радиусом, равным s, с центром в точке B. Отбросив первое условие, мы получим также бесчисленное множество точек M, лежащих на дуге сегмента, построенного на BC и вмещающего угол, равный $\frac{1}{2}\angle A$. Таким образом, нахождение точки M сводится к построению двух геометрических мест, из которых каждое мы построить умеем. Задача окажется невозможной, если эти геометрические места не будут иметь общих точек; задача будет иметь одно или два решения, смотря по тому, касаются или же пересекаются эти геометрические места (на нашем чертеже получаются два треугольника ABC и A_1BC, удовлетворяющие условиям задачи).

Иногда задача сводится не к определению точки, а к нахождению прямой, удовлетворяющей нескольким условиям. Если отбросим одно из условий, то получим бесчисленное множество прямых; при этом может случиться, что эти прямые определяют некоторую линию (например, все они будут касательными к некоторой окружности). Отбросив другое условие и приняв во внимание то, которое было откинуто ранее, мы получим снова бесчисленное множество прямых, которые, быть может, определят некоторую другую линию. Построив, если возможно, эти две линии, мы затем легко найдем и искомую прямую. Приведем пример.

135. Задача. *Провести секущую к двум данным окружностям O и O_1 так, чтобы части секущей, заключенные внутри окружностей, равнялись соответственно данным отрезкам A и A_1.*

Если возьмем только одно условие, например, чтобы часть секущей, лежащая внутри круга O, равнялась a, то получим бесчисленное множество секущих, которые все должны быть одинаково удалены от центра этого круга (так как равные хорды одинаково удалены от центра). Поэтому, если в круге O где-нибудь построим хорду, равную a, а затем радиусом, равным расстоянию этой хорды от центра, опишем окружность, концентрическую с O, то все секущие, о которых идет речь, должны касаться этой вспомогательной окружности; подобным образом, приняв во внимание только второе условие, мы увидим, что искомая секущая должна касаться второй вспомогательной окружности, концентрической с O. Значит, вопрос приводится к построению общей касательной к двум окружностям.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти геометрические места

1. Точек, из которых касательные, проведенные к данной окружности, равны данному отрезку.

2. Точек, из которых данная окружность видна под данным углом (т. е. две касательные, проведенные из данной точки к окружности, составляют между собой данный угол).

3. Центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной прямой.

4. Центров окружностей, описанных данным радиусом и касающихся данной окружности (два случая: касание внешнее и касание внутреннее).

5. Отрезок данной длины движется параллельно самому себе так, что один его конец скользит по окружности. Найти геометрическое место, описанное другим концом.

Указание. Возьмем две прямые, изображающие два положения, движущейся прямой, и через концы их, лежащие на окружности, проведем радиусы, а через другие концы проведем прямые, параллельные этим радиусам, до пересечения с прямой, проходящей через центр и параллельной движущейся линии. Рассмотрим образовавшиеся параллелограммы.

6. Отрезок данной длины движется так, что концы его скользят по сторонам прямого угла. Найти геометрическое место, описываемое серединой этого отрезка.

Доказать теоремы

7. Из всех хорд, проходящих через точку A, взятую внутри данного круга, наименьшей будет та, которая перпендикулярна к диаметру, проходящему через точку A.

8. На хорде AB взяты две точки D и E на равном расстоянии от середины C этой хорды, и через эти точки восставлены к AB перпендикуляры DF

и EG до пересечения с окружностью. Доказать, что эти перпендикуляры равны.

Указание. Перегнуть чертеж по диаметру.

9. В круге проведены две хорды CC' и DD' перпендикулярно к диаметру AB. Доказать, что прямая MM', соединяющая середины хорд CGD и $B'D'$, перпендикулярна к AB.

10. В круге с центром O проведена хорда AB и продолжена на расстояние BC, равное радиусу. Через точку C и центр O проведена секущая CD (D — вторая точка пересечения с окружностью). Доказать, что угол AOD равен утроенному углу ACD.

11. Если через центр окружности и данную точку вне ее проведем секущую, то часть ее, заключенная между данной точкой и ближайшей точкой пересечения, есть наименьшее расстояние, а часть, заключенная между данной точкой и другой точкой пересечения, есть наибольшее расстояние этой точки от окружности.

12. Кратчайшее расстояние между двумя окружностями, лежащими одна вне другой, есть отрезок линии центров, заключенный между окружностями.

13. Если через точку пересечения двух окружностей будем проводить секущие, не продолжая их за окружности, то наибольшей из них окажется та, которая параллельна линии центров.

14. Если к двум окружностям, касающимся извне, провести три общие касательные, то внутренняя из них делит пополам тот отрезок каждой внешней, который ограничен точками касания.

15. Через точку A окружности проведена хорда AB и затем касательная в точке B. Диаметр, перпендикулярный радиусу OA, встречает касательную и хорду (или ее продолжение) соответственно в точках C и D. Доказать, что $BC = CD$.

16. К двум окружностям центров O и O_1, касающимся извне в точке A, проведена общая внешняя касательная BC (B и C — точки касания); доказать, что угол BAC есть прямой.

Указание. Провести в точке A общую касательную и рассмотреть равнобедренные треугольники ABD и ADC.

17. Две прямые исходят из одной и той же точки M и касаются окружности в точках A и B. Проведя радиус OB, продолжают его за точку B на расстояние $BC = OB$. Доказать, что $\angle AMC = \angle BMC$.

18. Две прямые, исходящие из точки M, касаются окружности в точках A и B. На меньшей из двух дуг, ограниченных точками A и B, берут произвольную точку C и через нее проводят третью касательную до пересечения с MA и MB в точках D и E. Доказать, что: 1) периметр ΔMDE и 2) угол DOE не изменяются при изменении положения точки C.

Указание. Периметр $DME = MA + MB$, $\quad \angle DOE = \frac{1}{2}\angle AOB$.

19. Параллельно прямой OO', соединяющей центры двух равных окружностей, проведена секущая, которая с окружностью O пересекается в точках A и B, с окружностью O' — в точках a' и B'.

Доказать, что $Aa' = BB' = OO'$.

Задачи на построение

20. Разделить данную дугу на 4, 8, 16, ... равных частей.

21. По сумме и разности дуг одного и того же радиуса найти эти дуги.

22. Описать такую окружность с центром в данной точке, которая разделила бы данную окружность пополам.

23. На данной прямой найти точку, наименее удаленную от данной окружности.

24. В круге дана хорда. Провести другую хорду, которая делилась бы первой пополам и составляла бы с ней данный угол (при всяком ли данном угле задача возможна?).

25. Через данную в круге точку провести хорду, которая делилась бы этой точкой пополам.

26. Из точки, данной на стороне угла, описать окружность, которая от другой стороны угла отсекла бы хорду данной длины.

27. Данным радиусом описать окружность, центр которой лежал бы на стороне данного угла и которая от другой стороны его отсекла бы хорду данной длины.

28. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой в данной точке.

29. Провести касательную к данной окружности параллельно данной прямой.

30. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку A и касалась бы данной прямой в данной на ней точке B.

31. Описать окружность, касательную к сторонам данного угла, причем к одной из них в данной точке.

32. Между двумя параллельными прямыми дана точка; провести окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых.

33. Провести к данной окружности касательную под данным углом к данной прямой (сколько решений?).

34. Из точки, данной вне круга, провести к нему секущую так, чтобы ее внутренняя часть равнялась данному отрезку (исследовать задачу).

35. Данным радиусом описать окружность, проходящую через данную точку и касательную к данной прямой.

36. На данной прямой найти такую точку, чтобы касательные, проведенные из нее к данной окружности, были данной длины.

37. Построить треугольник, зная один угол и две высоты, из которых одна проведена из вершины данного угла.

38. Даны две точки; провести прямую так, чтобы перпендикуляры, опущенные на нее из этих точек, имели данные длины.

39. Описать окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

40. Описать окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

41. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данного круга и проходила бы через данную точку. (Рассмотреть три случая: данная точка лежит 1) вне круга, 2) на окружности и 3) внутри круга.)

42. Данным радиусом описать окружность, которая касалась бы данной прямой и данного круга.

43. Данным радиусом описать окружность, которая от сторон данного угла отсекала бы хорды данной длины.

44. Описать окружность, касающуюся данного круга в данной точке и данной прямой (два решения).

45. Описать окружность, касающуюся данной прямой в данной точке и данного круга (два решения).

46. Описать окружность, касающуюся двух данных кругов, причем одного из них в данной точке. (Рассмотреть три случая: 1) искомый круг лежит вне данных кругов; 2) один из данных кругов лежит вне искомого, другой внутри; 3) оба данных круга лежат внутри искомого.)

47. Описать окружность, касающуюся трех равных кругов извне или внутри.

48. В данный сектор вписать окружность, касающуюся радиусов, ограничивающих сектор, и дуги сектора.

49. Вписать в данный круг три равных круга, которые касались бы попарно между собой и данного круга.

50. Через точку, данную внутри круга, провести хорду так, чтобы разность ее отрезков равнялась данному отрезку.

Указание. Провести окружность, концентрическую данной и проходящую через данную точку. В этой окружности от данной точки построить хорду данной длины.

51. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, равнялась данной длине.

Указание. Построить прямоугольный треугольник, имеющий гипотенузой отрезок прямой, соединяющий центры данных окружностей с катетом, равным половине данного отрезка, и т. д.

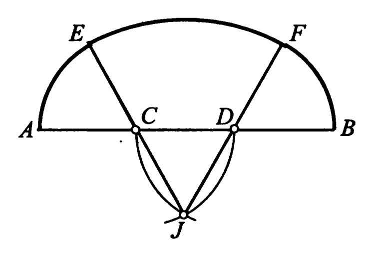


Рис. 154

52. Из точки, данной вне круга, провести секущую так, чтобы внешняя часть ее равнялась внутренней.

Указание. Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, A — данная точка. Строим $\triangle AOB$, где $AB = R$, $OB = 2R$. Если C — середина отрезка OB, то прямая AC — искомая.

53. Начертить дугу, сопрягающуюся (§ 116) с данной прямой в данной точке и проходящую через данную точку.

54. Соединить две непараллельные прямые сопрягающей (§ 116) их дугой. Рассмотреть три случая:

1) когда точки сопряжения и радиус дуги не даны;

2) когда дан только радиус дуги;

3) когда дана одна точка сопряжения, а радиус не дан (примеры такого соединения прямых дугами представляют «закругления» железнодорожного пути).

55. Линия, называемая в архитектуре «кривой о трех центрах» (или «полуовальной кривой»), чертится так (рис. 154): делят отрезок AB на три равные части в точках C и D; радиусом, равным CD с центрами в этих точках, высекают дуги в точке J; проводят прямые JC и JD и их продолжают; описывают дуги AE и BF с центрами в точках C и D и дугу EF с центром в точке J. Объяснить, почему дуги AE, EF и FB сопрягаются. Сопрягались бы они и тогда, когда AC было бы равно DB, но не равно CD?

6. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

136. Определения. Если все вершины многоугольника $ABCDE$ (рис. 155) лежат на окружности, то говорят, что этот многоугольник **вписан в окружность**, или что окружность **описана вокруг него**.

Если все стороны какого-нибудь многоугольника ($MNPQ$, рис. 155) касаются окружности, то говорят, что этот многоугольник **описан около окружности**, или что окружность **вписана в него**.

137. Теоремы: I) ***Около всякого треугольника можно описать окружность и притом только одну.***

2) ***Во всякий треугольник можно вписать окружность и притом только одну.***

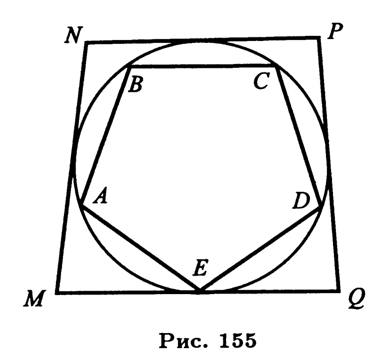


Рис. 155

1) Вершины A, B и C всякого треугольника суть три точки, не лежащие на одной прямой, а через такие точки, как мы видели (§ 104), всегда можно провести окружность и притом только одну.

2) Если возможна такая окружность, которая касалась бы всех сторон треугольника ABC (рис. 156), то ее центр должен быть точкой, одинаково удаленной от этих сторон. Докажем, что такая точка существует. Геометрическое место точек, равно отстоящих от сторон AB и AC, есть биссектриса AM угла A (§ 60); геометрическое место точек, равно отстоящих от сторон BA и BC, есть биссектриса BN угла B. Эти две биссектрисы должны, очевидно, пересечься внутри треугольника в некоторой точке O. Эта точка и будет равноудаленной от всех сторон треугольника, так как она находится на обоих геометрических местах. Итак, чтобы вписать круг в треугольник, делим какие-нибудь два угла его, например A и B, пополам и точку пересечения биссектрис берем за центр. За радиус берем один из перпендикуляров OP, OQ или OR, опущенных

из центра на стороны треугольника. Окружность коснется сторон в точках P, Q и R, так как стороны в этих точках перпендикулярны к радиусам в их концах, лежащих на окружности (§ 113). Другой вписанной окружности не может быть, так как две биссектрисы пересекаются только в одной точке, а из одной точки на прямую можно опустить только один перпендикуляр.

З а м е ч а н и е. Оставляем самим учащимся убедиться, что центр описанной окружности лежит внутри треугольника только тогда, когда треугольник остроугольный; в тупоугольном же треугольнике он лежит вне его, а в прямоугольном — на середине гипотенузы. Центр вписанной окружности лежит всегда внутри треугольника.

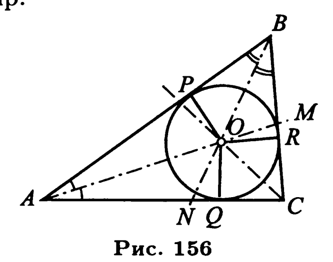


Рис. 156

С л е д с т в и е. Точка O (рис. 156), находясь на одинаковом расстоянии от сторон CA и CB, должна лежать на биссектрисе угла C; следовательно, *биссектрисы трех углов треугольника пересекаются в одной точке.*

138. Вневписанные окружности. Вневписанными называются окружности (рис. 157), которые касаются одной стороны треугольника и п р о д о л ж е н и й двух других сторон (они лежат в н е треугольника, вследствие чего и получили название **вневписанных**).

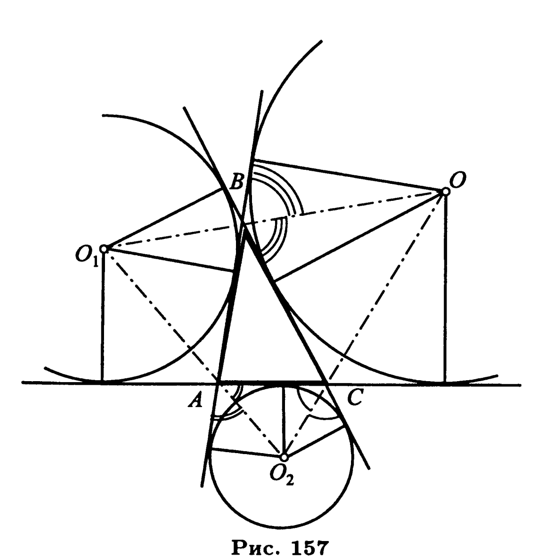


Рис. 157

Таких окружностей для всякого треугольника может быть три. Чтобы построить их, проводят биссектрисы внешних углов треугольника ABC и точки их пересечений берут за центры. Так, центром окружности, вписанной в угол A, служит точка O, т. е. пересечение биссектрис BO и CO внешних углов, не смежных с A; радиус этой окружности есть перпендикуляр, опущенный из O на какую-либо сторону треугольника.

139. Свойства вписанного выпуклого четырехугольника. 1) ***В выпуклом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым.***

2) ***Обратно, если в выпуклом четырехугольнике сумма противоположных углов равна двум прямым, то около него можно описать окружность.***

1) Пусть $ABCD$ (рис. 158) есть вписанный выпуклый четырехугольник; требуется доказать, что

$$\angle B + \angle D = 2d \quad \text{и} \quad \angle A + \angle C = 2d.$$

Так как сумма всех четырех углов всякого выпуклого четырехугольника равна $4d$ (§ 82), то достаточно доказать только одно из требуемых равенств.

Докажем, например, что $\angle B + \angle D = 2d$.

Углы B и D, как вписанные, измеряются: первый — половиной дуги ADC, второй — половиной дуги ABC; следовательно, сумма $\angle B + \angle D$ измеряется суммой $\frac{1}{2}\smile ADC + \frac{1}{2}\smile ABC$, а эта сумма равна $\frac{1}{2}(\smile ADC + \smile ABC)$, т. е. равна половине окружности; значит,

$$\angle B + \angle D = 180^\circ = 2d.$$

2) Пусть $ABCD$ (рис. 158) есть такой выпуклый четырехугольник, у которого $\angle B + \angle D = 2d$, и, следовательно, $\angle A + \angle C = 2d$. Требуется доказать, что около такого четырехугольника можно описать окружность.

Через какие-нибудь три его вершины, например через A, B и C, проведем окружность (что всегда можно сделать). Четвертая вершина D должна находиться на этой окружности, потому что в противном случае вершина угла D лежала бы или внутри круга, или вне его, и тогда этот угол не измерялся бы половиной дуги ABC; поэтому сумма $\angle B + \angle D$ не измерялась бы полусуммой дуг ADC а ABC и, значит, сумма $\angle B + \angle D$ не равнялась бы $2d$, что противоречит условию.

Следствия. 1) *Из всех параллелограммов только около прямоугольника можно описать окружность.*

2) *Около трапеции можно описать окружность только тогда, когда она равнобочная.*

140. Свойство описанного четырехугольника. ***В описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.***

Пусть $ABCD$ (рис. 159) будет описанный четырехугольник, т. е. стороны его касаются окружности; требуется доказать, что $AB + CD = BC + AD$.

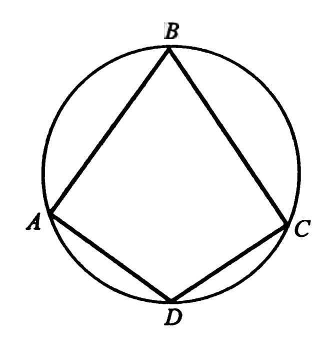




Рис. 158

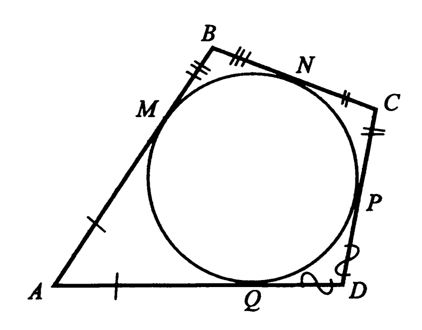


Рис. 159

Обозначим точки касания буквами M, N, P и Q. Так как две касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то $AM = AQ$, $BM = BN$, $CN = CP$ и $DP = DQ$.

Следовательно,

$$AM + MB + CP + PD = AQ + QD + BN + NC,$$

т. е.

$$AB + CD = AD + BC.$$

7. ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

141. Мы видели, что:

1) ***три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины, пересекаются в одной точке*** (которая есть центр описанного круга);

2) ***три биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке*** (которая есть центр вписанного круга).

Следующие две теоремы указывают еще две замечательные точки треугольника: 3) точку пересечения трех высот и 4) точку пересечения трех медиан.

142. Теорема. ***Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.***

Через каждую вершину $\triangle ABC$ (рис. 160) проведем прямую, параллельную противоположной стороне его. Тогда получим вспомогательный $\triangle A_1B_1C_1$, к сторонам которого высоты данного треугольника перпендикулярны. Так как $C_1B = AC = BA_1$ (как противоположные стороны параллелограммов), то точка B есть середина стороны A_1C_1.

Подобно этому убедимся, что C есть середина A_1B_1 и A — середина B_1C_1. Таким образом, высоты AD, BE и CF перпендикулярны

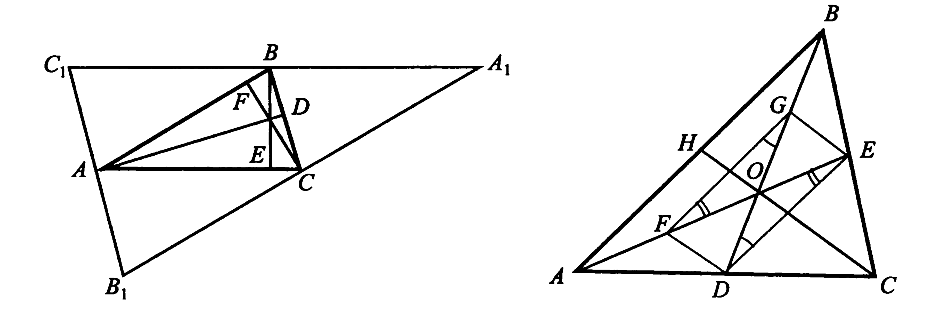


Рис. 160 Рис. 161

к сторонам $\triangle A_1B_1C_1$ и проходят через их середины, а такие перпендикуляры, как мы знаем (§ 104), пересекаются в одной точке.

З а м е ч а н и е. Точка, в которой пересекаются высоты треугольника, называется его **ортоцентром**.

143. Т е о р е м а. ***Три медианы треугольника пересекаются в одной точке; эта точка отсекает от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.***

Возьмем в $\triangle ABC$ (рис. 161) какие-нибудь две медианы, например AE и BD, пересекающиеся в точке O, и докажем, что

$$OD = \frac{1}{3}BD \quad \text{и} \quad OE = \frac{1}{3}AE.$$

Для этого, разделив OA и OB пополам в точках F и G, построим четырехугольник $DEGF$. Так как отрезок FG соединяет середины двух сторон $\triangle ABO$, то $FG \| AB$ и $FG = \frac{1}{2}AB$. Отрезок DE также соединяет середины двух сторон $\triangle ABC$; поэтому $DE \| AB$ и $DE = \frac{1}{2}AB$. Отсюда выводим, что $DE \| FG$ и $DE = FG$; следовательно, четырехугольник $DEGF$ есть параллелограмм (§ 89), и потому $OF = OE$ и $OD = OG$. Отсюда следует, что

$$OE = \frac{1}{3}AE \quad \text{и} \quad OD = \frac{1}{3}BD.$$

Если теперь возьмем третью медиану с одной из медиан AE или BD, то также убедимся, что точка их пересечения отсекает от каждой из них $1/3$ часть, считая от основания; значит, третья медиана должна пересечься с медианами AE и BD в одной и той же точке O.

Из физики известно, что пересечение медиан треугольника е с т ь е г о ц е н т р т я ж е с т и; он всегда лежит внутри треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

Найти геометрические места

1. Оснований перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B.

2. Середин хорд, проведенных в окружности через данную внутри нее точку.

Доказать теоремы

3. Если две окружности касаются, то всякая секущая, проведенная через точку касания, отсекает от окружностей две противолежащие дуги одинакового числа градусов.

4. Отрезки двух равных хорд, пересекающихся в одной окружности, соответственно равны.

5. Две окружности пересекаются в точках A и B, через A проведена секущая, пересекающая окружности в точках C и D; доказать, что угол CBD есть величина постоянная для всякой секущей, проведенной через точку A.

Указание. Углы ACB и ADB имеют постоянную величину.

6. Если через точку касания двух окружностей проведем две секущие и концы их соединим хордами, то эти хорды параллельны.

7. Если через точку касания двух окружностей проведем внутри них какую-либо секущую, то касательные, проведенные через концы этой секущей, параллельны.

8. Если основания высот треугольника соединим прямыми, то получим новый треугольник, для которого высоты первого треугольника служат биссектрисами.

9. На окружности, описанной около равностороннего $\triangle ABC$, взята произвольная точка M; доказать, что наибольший из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух остальных.

10. Из точки P проведены к окружности две касательные PA и PB и через точку B — диаметр BC. Доказать, что прямые CA и OP параллельны (O — центр окружности).

11. Через одну из точек пересечения двух окружностей проводят диаметр в каждой из них. Доказать, что прямая, соединяющая концы этих диаметров, проходит через вторую точку пересечения окружностей.

12. Диаметр AB и хорда AC образуют угол в $30°$. Через C проведена касательная, пересекающая продолжение AB в точке D. Доказать, что $\triangle ACD$ равнобедренный.

13. Если около треугольника опишем окружность и из произвольной точки ее опустим перпендикуляры на стороны треугольника, то их основания лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

Указание. Доказательство основывается на свойствах вписанных углов (§ 124) и углов вписанного четырехугольника (§ 139).

Задачи на построение

14. На данной бесконечной прямой найти точку, из которой данный отрезок был бы виден под данным углом.

15. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и высоте.

16. К дуге данного сектора провести такую касательную, чтобы часть ее, заключенная между продолженными радиусами (ограничивающими сектор), равнялась данному отрезку (свести эту задачу к предыдущей).

17. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и медиане, проведенной к основанию.

18. Даны по величине и положению два отрезка a и b. Найти такую точку, из которой отрезок a был бы виден под данным углом α и отрезок b под данным углом β.

19. В треугольнике найти точку, из которой его стороны были бы видны под равными углами.

Указание. Обратить внимание на то, что каждый из этих углов должен равняться $4/3d$.

20. Построить треугольник по углу при вершине, высоте и медиане, проведенной к основанию.

Указание. Продолжив медиану на равное расстояние и соединив полученную точку с концами основания, рассмотреть образовавшийся параллелограмм.

21. Построить треугольник, в котором даны: основание, прилежащий к нему угол и угол, составленный медианой, проведенной из вершины данного угла, и стороной, к которой эта медиана проведена.

22. Построить параллелограмм по двум его диагоналям и одному углу.

23. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и сумме или разности двух других сторон.

24. Построить четырехугольник по двум диагоналям, двум соседним сторонам и углу, образованному остальными двумя сторонами.

25. Даны три точки A, B и C. Провести через A такую прямую, чтобы расстояние между перпендикулярами, опущенными на эту прямую из точек B и C, равнялось данному отрезку.

26. В данный круг вписать треугольник, у которого два угла даны.

27. Около данного круга описать треугольник, у которого два угла даны.

28. Построить треугольник по радиусу описанного круга, углу при вершине и высоте.

29. Вписать в данный круг треугольник, у которого известны: сумма двух сторон и угол, противолежащий одной из этих сторон.

30. Вписать в данный круг четырехугольник, у которого даны сторона и два угла, не прилежащие к этой стороне.

31. В данный ромб вписать круг.

32. В равносторонний треугольник вписать три круга, которые попарно касаются друг друга и из которых каждый касается двух сторон треугольника.

33. Построить четырехугольник, который можно было бы вписать в окружность, по трем его сторонам и одной диагонали.

34. Построить ромб по данной стороне и радиусу вписанного круга.

35. Около данного круга описать равнобедренный прямоугольный треугольник.

36. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанного круга.

37. Построить треугольник по основанию и двум медианам, исходящим из концов основания. Указание: см. § 143.

38. То же по трем медианам. Указание: см. § 143.

39. Дана окружность и на ней точки A, B и C. Вписать в эту окружность такой треугольник, чтобы его биссектрисы при продолжении встречали окружность в точках A, B и C.

40. Та же задача, с заменой биссектрис треугольника его высотами.

41. Дана окружность и на ней три точки M, N и P, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) высота, биссектриса и медиана, исходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

42. На окружности даны две точки A и B. Из этих точек провести две параллельные хорды, сумма которых дана.

Задачи на вычисление

43. Вычислить вписанный угол, опирающийся на дугу, равную $^1/_{12}$ части окружности.

44. Круг разделен на два сегмента хордой, делящей окружность на части в отношении 5:7. Вычислить углы, которые вмещаются этими сегментами.

45. Две хорды пересекаются под углом в $36°15'32''$. Вычислить в градусах, минутах и секундах две дуги, заключенные между сторонами этого угла и их продолжениями, если одна из этих дуг относится к другой как 2:3.

46. Угол, составленный двумя касательными, проведенными из одной точки к окружности, равен $25°\ 15'$. Вычислить дуги, заключенные между точками касания.

47. Вычислить угол, составленный касательной и хордой, если хорда делит окружность на две части, относящиеся как 3:7.

48. Две окружности одинакового радиуса пересекаются под углом $^2/_3 d$; определить в градусах меньшую из дуг, заключающихся между точками пересечения.

Примечание. Углом двух пересекающихся дуг называется угол, составленный двумя касательными, проведенными к этим дугам из точки пересечения.

49. Из одного конца диаметра проведена касательная, а из другого — секущая, которая с касательной составляет угол в $20°\ 30'$. Найти меньшую из дуг, заключенных между касательной и секущей.

Глава III

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

1. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН

144. Задача измерения отрезка. До сих пор, сравнивая между собой два отрезка, мы могли определить, равны ли они между собой, и если не равны, то какой из них больше (§ 6). Нам приходилось это делать при изучении соотношений между сторонами и углами треугольника (§§ 46, 47), при сравнении отрезка прямой с ломаной (§ 50, 51) и в некоторых других случаях (§§ 63, 54, 55). Но такое сравнение отрезков между собой еще не дает точного представления о величине каждого из них.

Мы поставим теперь задачу установить точное понятие о длине отрезка и найти способы выражать эту длину при помощи числа.

145. Общая мера. Общей мерой двух отрезков прямой называется такой третий отрезок, который в каждом из первых двух содержится целое число раз без остатка. Так, если отрезок AM (рис. 162) содержится 5 раз в AB и 3 раза в CD, то AM есть общая мера AB и CD. Подобно этому можно говорить об общей мере двух дуг

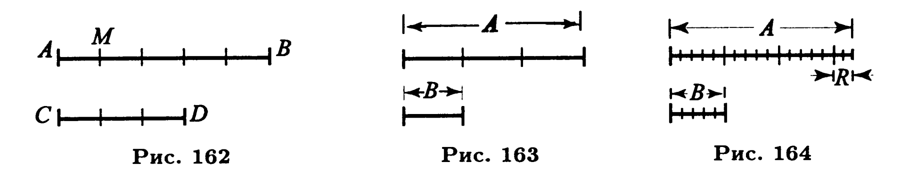


Рис. 162 Рис. 163 Рис. 164

одинакового радиуса, двух углов и вообще двух однородных величин.

Замечание. Очевидно, что если отрезок AM есть общая мера отрезков AB и CD, то, разделив AM на 2, 3, 4 и так далее равные части, мы получим меньшие общие меры для отрезков AB и CD.

Таким образом, если два отрезка имеют какую-нибудь общую меру, то можно сказать, что они имеют бесчисленное множество общих мер. Одна из них будет наибольшая.

146. Теоремы, на которых основано нахождение наибольшей общей меры. Чтобы найти наибольшую общую меру двух отрезков, употребляют способ последовательного отложения, подобный тому последовательному делению, каким в арифметике находят наибольший общий делитель двух целых чисел. Этот способ основывается на следующих теоремах.

1. ***Если меньший из двух отрезков*** (A и B, рис. 163) ***содержится в большем целое число раз без остатка, то наибольшая общая мера этих отрезков есть меньший из них.***

Пусть, например, отрезок B содержится в отрезке A ровно 3 раза; так как при этом, конечно, отрезок B содержится в самом себе ровно 1 раз, то B есть общая мера отрезков A и B; с другой стороны, эта мера есть и наибольшая, так как никакой отрезок, больший B, не может содержаться в B целое число раз.

2. ***Если меньший из двух отрезков*** (B, рис. 164) ***содержится в большем*** (A) ***целое число раз с некоторым остатком*** (R)***, то наибольшая общая мера этих отрезков*** (если она существует) ***должна быть и наибольшей общей мерой меньшего отрезка*** (B) ***и остатка*** (R). Пусть, например,

$$A = B + B + B + R.$$

Из этого равенства мы можем вывести следующие два заключения:

1) Если существует отрезок, содержащийся без остатка в B и R, то он содержится также без остатка и в A; если, например, какой-нибудь отрезок содержится в B ровно 5 раз и в R содержится ровно 2 раза, то в A он содержится $5 + 5 + 5 + 2$, т. е. 17 раз без остатка.

2) Обратно: если существует отрезок, содержащийся без остатка в A и B, то он содержится также без остатка и в R; если, например, какой-нибудь отрезок содержится в A ровно 17 раз и в B ровно 5 раз, то в той части отрезка A, которая равна B, он содержится 15 раз; следовательно, в остающейся части отрезка A, т. е. в R, он содержится $17 - 15$, т. е. 2 раза.

Таким образом, у двух пар отрезков

$$\overbrace{A \text{ и } B} \quad \overbrace{B \text{ и } R}$$

должны быть одни и те же общие меры (если они существуют); поэтому и наибольшая общая мера у них должна быть одна и та же.

К этим двум теоремам надо еще добавить следующую **аксиому измерения** (аксиому Архимеда):

Как бы велик ни был больший отрезок** (A) **и как бы мал ни был меньший отрезок** (B), **всегда, откладывая меньший на большем последовательно 1, 2, 3 и так далее раз, мы получим, что после некоторого** m**-го отложения или не получится никакого остатка, или получится остаток, меньший меньшего отрезка (B); другими словами, всегда можно найти столь большое целое положительное число m, что $B \cdot m < A$, но $B \cdot (m+1) > A$.

147. Нахождение наибольшей общей меры двух отрезков. Пусть требуется найти наибольшую общую меру двух данных отрезков AB и CD (рис. 165).

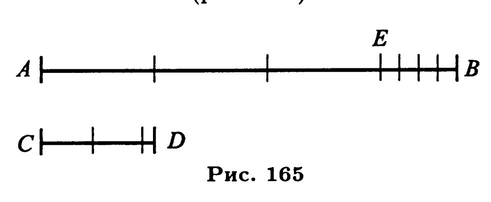


Рис. 165

Для этого на большем отрезке откладываем (с помощью циркуля) меньший отрезок столько раз, сколько это возможно. При этом, согласно аксиоме измерения, случится одно из двух: или 1) CD уложится в AB без остатка, тогда искомая мера, согласно теореме 1-й, будет CD, или 2) получится некоторый остаток EB, меньший CD (как у нас на чертеже); тогда, согласно теореме 2-й, вопрос приведется к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно CD и первого остатка EB. Чтобы найти ее, поступаем по предыдущему, т. е. откладываем EB на CD столько раз, сколько можно. И опять произойдет одно из двух: или 1) EB уложится в CD без остатка, тогда искомая мера и будет EB, или 2) получится остаток FD, меньший EB (как у нас на чертеже); тогда вопрос приведется к нахождению наибольшей общей меры двух меньших отрезков, именно EB и второго остатка FD.

Продолжая этот прием далее, мы можем встретиться с такими двумя возможными случаями:

1) после некоторого отложения не получится никакого остатка или

2) процесс последовательного отложения не будет иметь конца (в предположении, что мы имеем возможность откладывать как угодно малые отрезки, что, конечно, возможно только теоретически).

В первом случае последний остаток и будет наибольшей общей мерой данных отрезков. Чтобы удобней вычислить, сколько раз эта наибольшая общая мера содержится в данных отрезках, выписываем ряд равенств, получаемых после каждого отложения. Так, по нашему чертежу мы будем иметь:

после	первого	отложения	...	$AB = 3CD + EB$;
»	второго	»	...	$CD = 2EB + FD$;
»	третьего	»	...	$EB = 4FD$.

Переходя в этих равенствах от нижнего к верхнему, последовательно находим:

$$EB = 4FD; \quad CD = (4FD) \cdot 2 + FD = 9FD;$$
$$AB = (9FD) \cdot 3 + 4FD = 31FD.$$

Подобно этому можно находить наибольшую общую меру двух дуг одинакового радиуса, двух углов и т. п.

Во втором случае данные отрезки не могут иметь общей меры. Чтобы обнаружить это, предположим, что данные отрезки AB и CD имеют какую-нибудь общую меру. Мера эта, как мы видели, должна содержаться целое число раз не только в AB и в CD, но и в остатке EB, следовательно, и во втором остатке FD, и в третьем, и в четвертом и т. д. Так как остатки эти идут, последовательно уменьшаясь, то в каждом из них общая мера должна содержаться меньшее число раз, чем в предыдущем остатке. Если, например, в EB общая мера содержится 100 раз (вообще m раз), то в FD она содержится менее 100 раз (значит, не более 99 раз); в следующем остатке она должна содержаться менее 99 раз (значит, не более 98 раз) и т. д. Так как ряд целых положительных уменьшающихся чисел: 100, 99, 98, ... (и вообще m, $m-1$, $m-2, \ldots$) имеет конец (как бы велико ни было число m), то и процесс последовательного отложения, при достаточном его продолжении, должен дойти до конца, т. е. мы дойдем до того, что уже не получится никакого остатка. Значит, если последовательное отложение не имеет конца, то данные отрезки никакой общей меры иметь не могут.

148. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки. Два отрезка прямой называются соизмеримыми, если они имеют общую меру, и несоизмеримыми, когда такой общей меры не существует.

На практике нет возможности убедиться в существовании несоизмеримых отрезков, потому что, продолжая последовательное отложение, мы всегда дойдем до столь малого остатка, который в предыдущем остатке, по-видимому, укладывается целое число раз. Быть может при этом и должен был бы получиться некоторый остаток, но по причине неточности инструментов (циркуля) и несовершенства наших органов чувств (зрения) мы не в состоянии его заметить. Однако, как мы сейчас докажем, несоизмеримые отрезки существуют.

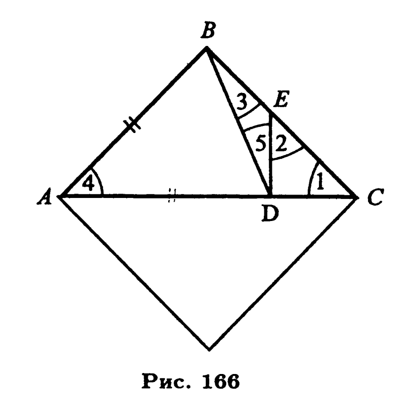


Рис. 166

149. Теорема. ***Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.***

Так как диагональ делит квадрат на два равнобедренных прямоугольных треугольника, то теорему эту можно высказать ины-

ми словами так: ***гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника несоизмерима с его катетом.***

Предварительно докажем следующее свойство такого треугольника; если на гипотенузе (рис. 166) отложим отрезок AD, равный катету, и проведем $DE \perp AC$, то образовавшийся при этом *прямоугольный треугольник DEC будет равнобедренный, а отрезок BE катета BC окажется равным отрезку DC гипотенузы.* Чтобы убедиться в этом, проведем прямую BD и рассмотрим углы треугольников DEC и BED. Так как треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный, то $\angle 1 = \angle 4$, и, следовательно, $\angle 1 = 45°$, а потому в прямоугольном треугольнике DEC и $\angle 2 = 45°$ и, значит, треугольник DEC имеет два равных угла и потому его стороны DC и DE равны.

В треугольнике BDE угол 3 равен прямому углу B без угла ABD, а угол 5 равен прямому углу ADE без угла ADB. Но $\angle ADB = \angle ABD$ (так как $AB = AD$); значит, и $\angle 3 = \angle 5$. Но тогда треугольник DBE должен быть равнобедренный, и потому $BE = ED = DC$.

Заметив это, станем находить общую меру отрезков AB и AC.

Так как $AC > AB$ и $AC < AB + BC$, т.е. $AC < 2AB$, то катет AB отложится на гипотенузе AC только один раз с некоторым остатком DC. Теперь надо этот остаток откладывать на AB или, что все равно, на BC. Но отрезок BE, по доказанному, равен DC. Значит, надо DC отложить еще на EC. Но EC есть гипотенуза равнобедренного треугольника DEC. Следовательно, процесс отложения для нахождения общей меры сводится теперь к откладыванию катета DC прямоугольного равнобедренного треугольника DEC на его гипотенузе EC. В свою очередь это отложение сведется к откладыванию катета на гипотенузе нового меньшего прямоугольного равнобедренного треугольника и т.д., очевидно, без конца. А если процесс этот не может окончиться, то общей меры отрезков AC и AB не существует.

150. Понятие об измерении отрезков. Чтобы составить ясное представление о величине данного отрезка, его сравнивают с другим, уже известным нам отрезком, например с метром (этот известный отрезок, с которым сравнивают другие отрезки, называется **единицей длины**). При этом могут представиться два различных случая: или измеряемый отрезок соизмерим с единицей, или несоизмерим с ней.

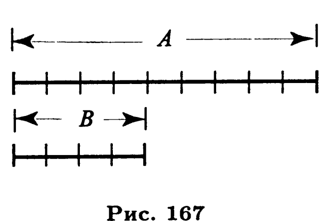


Рис. 167

1) *Измерить отрезок, соизмеримый с единицей, значит узнать, сколько раз в нем содержится единица или какая-нибудь доля единицы.*

Пусть, например, надо измерить какой-нибудь отрезок A (рис. 167) при помощи единицы B, соизмеримой с A. Тогда находят их общую меру и узнают, сколько раз она содержится в B и A. Если общей мерой

окажется сам отрезок B, то результат измерения выразится целым числом. Так, когда B содержится в A три раза, говорят, что длина отрезка A равна 3 единицам. Если же общей мерой будет некоторая доля B, то результат измерения выразится дробным числом. Так, если общая мера есть $1/4$ доля B и она содержится девять раз (как изображено на рис. 167), то говорят, что длина отрезка A равна $9/4$.

Число, получившееся после измерения, называется часто мерой той величины, которая измерялась. Числа целые и дробные называются **рациональными числами.**

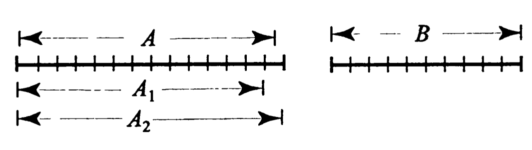


Рис. 168

2) Когда данный отрезок A несоизмерим с единицей B, тогда измерение выполняется косвенно: вместо отрезка A измеряют два других отрезка, *соизмеримых с единицей*, из которых один меньше, а другой больше A и которые разнятся от A как угодно мало. Чтобы найти такие соизмеримые отрезки, поступают так: положим, что мы желаем найти соизмеримые отрезки, которые отличались бы от A меньше, чем на $\frac{1}{10}$ единицы длины B. Тогда делим единицу B на 10 равных частей (рис. 168) и одну такую долю откладываем на отрезке A столько раз, сколько возможно. Пусть она уложится 13 раз с некоторым остатком, меньшим $\frac{1}{10}B$. Тогда мы будем иметь отрезок A_1, соизмеримый с единицей и меньший, чем A. Отложив $\frac{1}{10}B$ еще один раз, получим другой отрезок, A_2, тоже соизмеримый с единицей, но больший, чем A, который разнится от A менее чем на $\frac{1}{10}$ единицы. Длины отрезков A_1 и A_2 выражаются числами $\frac{13}{10}$ и $\frac{14}{10}$. Эти числа рассматриваются как приближенные меры длины отрезка A: первое с недостатком, второе — с избытком. При этом, так как отрезок A разнится от A_1 и от A_2 менее чем на $\frac{1}{10}$ единицы, то принято говорить, что каждое из этих чисел выражает длину отрезка A с точностью до $\frac{1}{10}$.

Вообще, чтобы найти приближенные меры длины отрезка A с точностью до $\frac{1}{n}$ единицы, делят единицу B на n равных частей и узнают, сколько раз $\frac{1}{n}$-я доля единицы содержится в A; если она содержится в A m раз с некоторым остатком, меньшим $\frac{1}{n}B$, то числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$

считаются приближенными мерами длины отрезка A с точностью до $\frac{1}{n}$-й, первое с недостатком, второе — с избытком.

Заметим, что этим путем мы можем находить приближенные результаты измерения и тогда, когда измеряемый отрезок A соизмерим с единицей B; только в этом случае мы, если пожелаем, можем найти также и точный результат, тогда как в случае несоизмеримости точного результата при помощи одних рациональных чисел мы получить не можем.

Для получения того числа, которое можно было бы принять за точную меру длины отрезка A, когда этот отрезок несоизмерим с единицей измерения, поступают следующим образом.

Вычисляют последовательно приближенную меру длины отрезка A с недостатком с точностью до 0,1, затем ту же меру с недостатком с точностью до 0,01, затем ее же с точностью до 0,001 и продолжают беспредельно этот процесс последовательного вычисления приближенной меры длины A, каждый раз повышая точность в 10 раз. При таком процессе будут получаться последовательно десятичные дроби сначала с одним десятичным знаком, затем с двумя, тремя и дальше все с бо́льшим и бо́льшим числом десятичных знаков. Неограниченное продолжение описанного процесса построения десятичных дробей определяет бесконечную непериодическую десятичную дробь. (Эта дробь не может оказаться периодической, иначе ее можно было бы обратить в обыкновенную, и отрезок A оказался бы соизмеримым с единицей длины.)

Из алгебры известно, что всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь определяет некоторое иррациональное число. К таким числам приводит, например, извлечение квадратного корня из числа в том случае, когда этот корень не извлекается точно. Так, $\sqrt{2}$ есть иррациональное число, представляемое бесконечной десятичной дробью*):

$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots.$$

Таким образом, бесконечная десятичная дробь, которая получается при приближенном измерении отрезка A, несоизмеримого с единицей B, определяет некоторое иррациональное число. Это число и принимается за точную меру длины A.

З а м е ч а н и е. К тому же самому иррациональному числу можно прийти, вычисляя последовательно приближенные значения длины отрезка A с точностью до 0,1; 0,01; 0,001;..., но не с недостатком, а с избытком. Действительно, два приближения, взятых с одинаковой десятичной точностью, одно с недостатком, другое с избытком,

*) Бесконечную десятичную дробь нельзя, конечно, полностью записать на листе бумаги, так как число ее десятичных знаков бесконечно. Тем не менее ее считают известной, если известен способ, при помощи которого можно определить любое число ее десятичных знаков.

разнятся между собой лишь последним десятичным знаком. При последовательном повышении степени точности этот последний знак будет отодвигаться все дальше и дальше вправо от запятой, число общих десятичных знаков обеих дробей будет становиться все больше и больше. При беспредельном продолжении процесса в обоих случаях получится, таким образом, одна и та же бесконечная десятичная дробь, т. е. одно и то же иррациональное число.

Точное значение бесконечной десятичной дроби считается бо́льшим всякого ее приближенного значения, взятого с недостатком, и меньшим всякого ее приближенного значения, взятого с избытком.

151. Бесконечные десятичные дроби. Введение бесконечных десятичных дробей производится в алгебре на основе следующих определений.

Бесконечная десятичная дробь называется действительным числом.

Две бесконечные десятичные дроби считаются равными, если их десятичные знаки одинакового порядка равны.

Из двух неравных бесконечных десятичных дробей считается бо́льшим действительным числом та дробь, в которой первый из неравных десятичных знаков одинакового порядка со второй дробью больше.

Если в бесконечной десятичной дроби все десятичные знаки, начиная с некоторого порядка, равны нулю, то дробь считается равной той конечной десятичной дроби, которая получится из данной зачеркиванием всех нулей, стоящих справа от последней значащей цифры. Так, бесконечная десятичная дробь 7,8530078000... равна конечной дроби 7,8530078. Бесконечная периодическая дробь с периодом 9 всегда заменяется конечной десятичной дробью, получаемой из данной увеличением на единицу ее последнего десятичного знака, отличного от 9, и отбрасыванием всех последующих девяток. Так, дробь 3,72999... заменяют конечной дробью 3,73.

152. Приближенные значения бесконечной десятичной дроби. Если оборвать данную бесконечную десятичную дробь на ее n-м знаке, то полученная конечная дробь называется *приближенным значением бесконечной десятичной дроби* с точностью до $\frac{1}{10^n}$ с недостатком. Если же в этой дроби увеличить на единицу ее последний десятичный знак, т. е. прибавить к ней $\frac{1}{10^n}$, то получится новая конечная дробь, которая называется приближенным значением бесконечной дроби с той же точностью с избытком. Если приближенное значение действительного числа α с n десятичными знаками с недостатком обозначим через α_n, а с избытком через α'_n, то $\alpha'_n = \alpha_n + \frac{1}{10^n}$. Из определения неравенства действительных чисел следует, что действительное число больше всякого его приближенного значения с недостатком и меньше всякого его приближенного значения с избытком. Так, пусть, например, дано действительное число, определяющее $\sqrt{2} = 1,414\ldots$. Его приближенное значение с точностью до 0,01 с недостатком: 1,41, с избытком: 1,42; так как

$$1,41 = 1,41000$$
$$1,42 = 1,42000,$$

то в силу определения неравенства действительных чисел имеем:

$$1,41000\ldots < 1,414\ldots < 1,42000\ldots, \quad \text{или} \quad 1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$$

153. Действия с действительными числами. Сложение. Пусть даны два действительных числа α и β. Возьмем их приближенные значения с произвольным числом n десятичных знаков, сначала с недостатком, а затем с избытком. Приближенные значения чисел α и β с недостатком обозначим соответственно через α_n и β_n, а приближенные значения с избытком — через α'_n и β'_n. При этом:

$$\alpha'_n = \alpha_n + \frac{1}{10^n}, \quad \beta'_n = \beta_n + \frac{1}{10^n}. \tag{1}$$

Составим теперь суммы $\alpha_n + \beta_n$ и $\alpha'_n + \beta'_n$. Каждая из них есть десятичная дробь, содержащая n десятичных знаков.

Назовем первую γ_n, а вторую γ'_n:

$$\alpha_n + \beta_n = \gamma_n, \quad \alpha'_n + \beta'_n = \gamma'_n.$$

Складывая почленно равенства (1), получим:

$$\alpha'_n + \beta'_n = \alpha_n + \beta_n + \frac{2}{10^n},$$

или $\gamma'_n = \gamma_n + \dfrac{2}{10^n}$. Это равенство показывает, что дробь γ'_n получается из дроби γ_n прибавлением двух единиц к ее последнему десятичному знаку. Будем теперь увеличивать n; в таком случае дробь γ_n приведет к образованию бесконечной десятичной дроби, которую обозначим γ. Эта дробь может оказаться или периодической, или непериодической. Допустим, что дробь γ непериодическая. В таком случае она должна содержать бесчисленное множество десятичных знаков, отличных от 9. В этом случае в дроби γ число десятичных знаков, отличных от 9, должно возрастать с возрастанием n. Так как прибавка в дроби γ числа $2/10^n$ не может оказать влияния на ее десятичные знаки, стоящие левее двух последних знаков, отличных от 9, то число общих первых десятичных знаков в дробях γ_n и γ'_n будет неограниченно возрастать с возрастанием n. Следовательно, дробь γ'_n будет приводить к той же бесконечной десятичной дроби, что и дробь γ_n. При этом из предыдущего следует, что при любом n

$$\gamma_n < \gamma < \gamma'_n. \tag{2}$$

Допустим теперь, что дробь γ периодическая. В таком случае она представляет собой некоторое рациональное число. Это число, как нетрудно сообразить, также удовлетворяет неравеству (2).

Определение. *Действительное число γ, удовлетворяющее неравенствам* (2), *называется суммой действительных чисел α и β:*

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

154. Другие действия с действительными числами. Совершенно аналогичным образом можно определить разность двух действитель-

ных чисел, их произведение и частное от деления одного действительного числа на другое. Более подробное изучение результатов этих действий показывает, что определенные таким образом сумма и произведение действительных чисел подчиняются основным законам действий, имеющим место для чисел рациональных: сложение подчиняется переместительному и сочетательному законам:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

а умножение — переместительному, сочетательному и распределительному законам:

$$\alpha\beta = \beta\alpha, \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

В тех случаях, когда бесконечные десятичные дроби будут периодическими, определенные выше действия над ними будут приводить, как легко показать, к тем же результатам, что и действия над обыкновенными дробями, получаемыми после обращения периодических дробей в простые.

Таким образом, рациональные числа являются лишь частным видом действительных чисел.

155. Отношение двух отрезков. Число, получаемое в результате измерения отрезка A, называется численной мерой отрезка. Если отрезок A соизмерим с единицей измерения, то его численная мера есть число рациональное. Если он несоизмерим с единицей длины, то его численная мера есть иррациональное число, представляемое бесконечной непериодической десятичной дробью.

В дальнейшем под длиной отрезка мы будем подразумевать его численную меру при определенной единице измерения. Под отношением двух отрезков — отношение их численных мер.

Отношение двух отрезков не зависит от того, как выбрана единица измерения. В самом деле, если, например, вместо одной уже выбранной единицы измерения взять другую, в 3 раза меньшую, то в каждом отрезке эта новая единица уложится втрое большее число раз, чем прежняя. В той дроби, которая представляет отношение отрезков, числитель и знаменатель оба увеличатся в 3 раза. Величина же самой дроби от этого не изменится. Если данные отрезки соизмеримы, то при вычислении их отношения за единицу измерения удобно взять их общую меру, в таком случае сразу станет ясно, что отношение двух соизмеримых отрезков равно отношению чисел, показывающих, сколько раз их общая мера укладывается в каждом из них.

2. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

156. Предварительные понятия. В окружающей нас жизни часто встречаются фигуры, имеющие различные размеры, но одинаковую форму. Таковы, например, одинаковые фотографии одного и того же лица, изготовленные в различных размерах, или планы

здания или целого города, вычерченные в различных размерах. Такие фигуры принято называть подобными. Умение измерять длины отрезков позволяет точно определить понятие о геометрическом подобии фигур и дать способы изменения размера фигуры без изменений ее формы. Изменение размеров фигуры без изменения ее формы называется подобным преобразованием данной фигуры. Изучение подобия фигур мы начнем с простейшего случая, именно с подобия треугольников.

157. Сходственные стороны. В этой главе рассматриваются такие треугольники, у которых углы одного соответственно равны углам другого. Условимся в таких случаях называть **сходственными** те стороны этих треугольников, которые лежат между соответственно равными углами (такие стороны также и противолежат равным углам).

158. Определение. *Два треугольника называются подобными, если:* 1) *углы одного соответственно равны углам другого* и 2) *стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого.*

Что такие треугольники возможны, показывает следующая лемма*).

159. Лемма. ***Прямая*** (DE, рис. 169), ***параллельная какой-нибудь стороне*** (AC) ***треугольника*** (ABC), ***отсекает от него треугольник*** (DBE), ***подобный данному.***

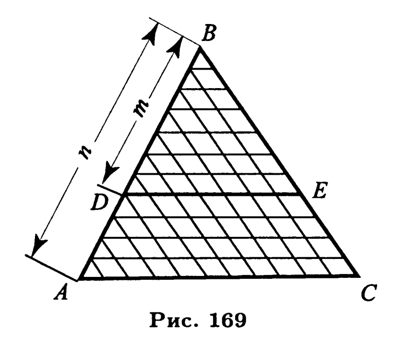


Рис. 169

Пусть в треугольнике ABC прямая DE параллельна стороне AC. Требуется доказать, что треугольник DBE подобен треугольнику ABC.

Предстоит доказать, во-первых, равенство углов и, во-вторых, пропорциональность сходственных сторон треугольников ABC и DBE.

1. Углы треугольников соответственно равны, так как угол B у них общий, а $\angle D = \angle A$ и $\angle E = \angle C$, как соответственные углы при параллельных DE и AC и секущих AB и CB.

2. Докажем теперь, что стороны $\triangle DBE$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle ABC$, т. е. что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

Для этого рассмотрим отдельно следующие два случая.

*) Леммой называется вспомогательная теорема, которая излагается для того, чтобы при ее помощи доказать следующую за ней теорему.

1. Стороны AB и DB имеют общую меру. Разделим AB на части, равные этой общей мере. Тогда BD разделится на целое число таких частей. Пусть этих частей содержится m в BD и n в AB. Проведем из точек деления ряд прямых, параллельных AC, и другой ряд прямых, параллельных BC. Тогда BE и BC разделятся на равные части (§ 95), которых будет m в BE и n в BA. Точно так же DE разделится на m равных частей, а AC на n равных частей, причем части DE равны частям AC (как противоположные стороны параллелограммов). Теперь очевидно, что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m}{n}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{n}; \quad \frac{DE}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Следовательно, $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}$.

2. Стороны AB и DB не имеют общей меры (рис. 170). Найдем приближенные значения каждого из отношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$, сначала с точностью до $1/10$, затем до $1/100$, и далее будем последовательно повышать степень точности в 10 раз.

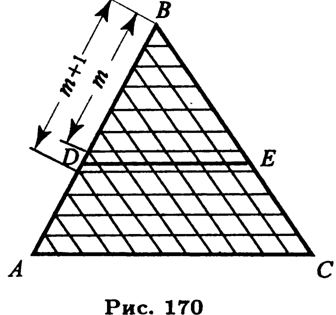


Рис. 170

Для этого разделим сторону AB сначала на 10 равных частей и через точки деления проведем прямые, параллельные AC. Тогда сторона BC разделится также на 10 равных частей. Предположим, что $1/10$ доля AB укладывается в BD M раз, причем остается остаток, меньший $1/10$ AB. Тогда, как видно из рис. 170, $1/10$ доля BC укладывается в BE также m раз и остается остаток, меньший $1/10$ BC. Следовательно, с точностью до $1/10$ имеем:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{m}{10}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m}{10}.$$

Далее, разделим AB на 100 равных частей и предположим, что $1/100 AB$ укладывается m_1 раз в BD. Проводя опять через точки деления прямые, параллельные AC, убеждаемся, что $1/100 BC$ укладывается в BE также m_1 раз. Поэтому с точностью до $1/100$ имеем:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{m_1}{100} \quad \text{и} \quad \frac{BE}{BC} = \frac{m_1}{100}.$$

Повышая далее степень точности в 10, 100, ... раз, убеждаемся, что приближенные значения соотношений $\frac{BD}{BA}$ и $\frac{BE}{BC}$, вычисленные

с произвольной, но одинаковой десятичной точностью, равны. Следовательно, значения этих отношений выражаются одной и той же бесконечной десятичной дробью; значит

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}.$$

Точно так же, проводя через точки деления стороны AB прямые, параллельные стороне BC, найдем, что

$$\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}.$$

Таким образом, и в этом случае имеем:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

160. Замечания: 1) Доказанные соотношения представляют собой три следующие пропорции:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}; \quad \frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}; \quad \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC}.$$

Переставив в них средние члены, получим:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{BA}{BC}; \quad \frac{BD}{DE} = \frac{BA}{AC}; \quad \frac{BE}{DE} = \frac{BC}{AC}.$$

Таким образом, если в треугольниках стороны пропорциональны, то отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению сходственных сторон другого треугольника.

2) Подобие фигур обозначается иногда знаком $\backsim$.

Три признака подобия треугольников

161. Теоремы. ***Если в двух треугольниках:***

1) ***два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого*** или

2) ***две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, лежащие между этими сторонами, равны*** или

3) ***если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны.***

1) Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 171) будут два треугольника, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и, следовательно, $\angle C = \angle C_1$.

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Отложим на AB отрезок BD, равный A_1B_1, и проведем $DE \| AC$.

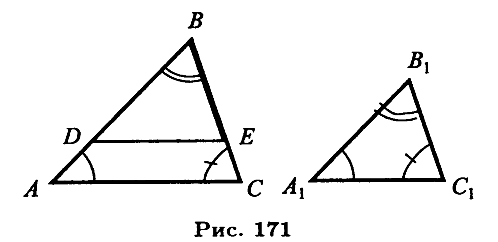


Рис. 171

Тогда получим вспомогательный $\triangle DBE$, который, согласно доказанной выше лемме, подобен $\triangle ABC$. С другой стороны, $\triangle DBE \backsim \triangle A_1B_1C_1$, потому что у них: $BD = A_1B_1$ (по построению), $\angle B = \angle B_1$ (по условию) и $\angle D = \angle A_1$ (потому что $\angle D = \angle A$ и $\angle A = \angle A_1$). Но очевидно, что если из двух равных треугольников один подобен третьему, то и другой ему подобен; следовательно, $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

2) Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 172) дано:

$$\angle B = \angle B_1 \quad \text{и} \quad \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны. Отложим снова на AB отрезок BD, равный A_1B_1, и проведем $DE \| AC$. Тогда получим вспомогательный $\triangle BDE$, подобный $\triangle ABC$. Докажем, что он равен $\triangle A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{DC}{BE}. \qquad (2)$$

Сравнивая эту пропорцию с данной пропорцией (1), замечаем, что первые отношения обеих пропорций одинаковы ($DB = A_1B_1$ по построению); следовательно, остальные отношения этих пропорций также равны, т. е.
$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE}.$$

Но если в пропорции предыдущие члены равны, то должны быть равны и последующие члены, значит

$$B_1C_1 = BE.$$

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по равному углу ($\angle B = \angle B_1$), заключенному между соответственно равными сторонами; значит, эти треугольники равны. Но $\triangle DBE$ подобен $\triangle ABC$, поэтому и $\triangle A_1B_1C_1$ подобен $\triangle ABC$.

3) Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 173) дано:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

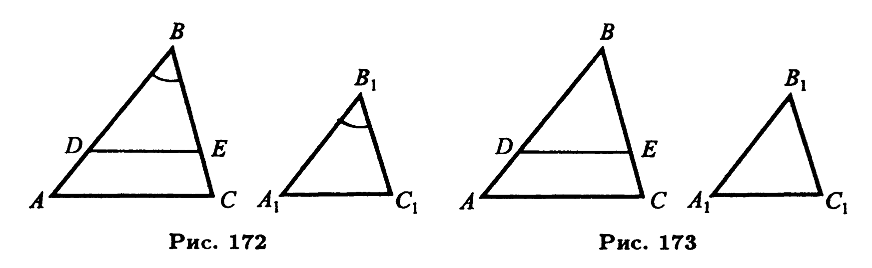


Рис. 172 **Рис. 173**

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Сделав построение такое же, как и прежде, покажем, что $\Delta DBE = \Delta A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{DE}. \tag{2}$$

Сравнивая этот ряд отношений с данным рядом (1), замечаем, что первые отношения у них равны, следовательно, и остальные отношения равны, и потому

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{BC}{BE},$$

откуда

$$B_1C_1 = BE,$$

и

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AC}{DE},$$

откуда

$$A_1C_1 = DE.$$

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по три соответственно равные стороны; значит, они равны. Но один из них, именно ΔDBE, подобен ΔABC; следовательно, и другой $\Delta A_1B_1C_1$ подобен ΔABC.

162. Замечания о приеме доказательства. Полезно обратить внимание на то, что прием доказательства, употребленный нами в трех предыдущих теоремах, один и тот же, а именно: отложив на стороне большего треугольника отрезок, равный сходственной стороне меньшего, и проведя прямую, параллельную другой стороне, мы образуем вспомогательный треугольник, подобный большему данному. После этого, в силу условия доказываемой теоремы и свойства подобных треугольников, мы обнаруживаем равенство вспомогательного треугольника меньшему данному и, наконец, делаем заключение о подобии данных треугольников.

Признаки подобия прямоугольных треугольников

163. Два признака, не требующие особого доказательства. Так как прямые углы всегда равны друг другу, то на основании доказанных признаков подобия треугольников мы можем утверждать, что ***если в двух прямоугольных треугольниках***:

1) ***острый угол одного равен острому углу другого*** или

2) ***катеты одного пропорциональны катетам другого, то такие треугольники подобны.***

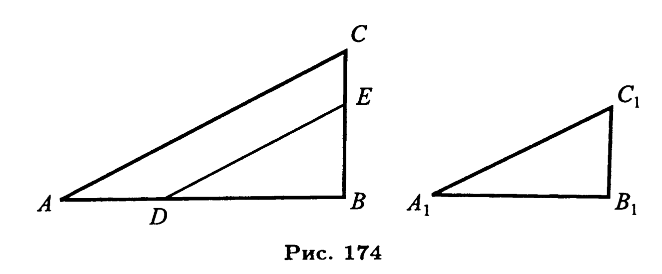


Рис. 174

164. Признак, требующий особого доказательства.

Теорема. ***Если гипотенуза и катет одного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники подобны.***

Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника (рис. 174), у которых углы B и B_1 прямые и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Требуется доказать, что такие треугольники подобны.

Для доказательства применим тот же прием, которым мы пользовались ранее. На AB отложим $BD = A_1B_1$ и проведем $DE \| AC$. Тогда получим вспомогательный ΔDBE, подобный ΔABC. Докажем, что он равен $\Delta A_1B_1C_1$. Из подобия треугольников ABC и DBE следует:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DE}. \qquad (2)$$

Сравнивая эту пропорцию с данной (1), находим, что первые отношения их одинаковы; следовательно, равны и вторые отношения, т. е.

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AC}{A_1C_1},$$

откуда

$$DE = A_1C_1.$$

Теперь видим, что треугольники DBE и $A_1B_1C_1$ имеют по равной гипотенузе и равному катету, следовательно, они равны; а так как один из них подобен ΔABC, то и другой ему подобен.

165. Т е о р е м а (об отношении высот). ***В подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны сходственным высотам***, т. е. тем высотам, которые опущены на сходственные стороны.

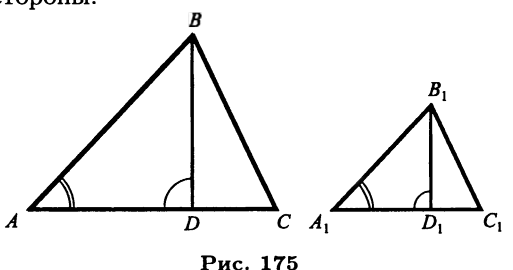


Рис. 175

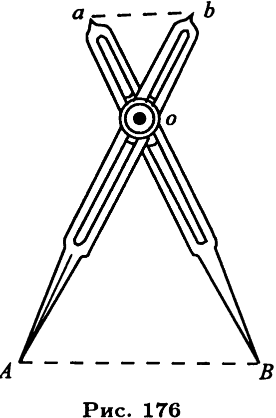


Рис. 176

Действительно, если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 175) подобны, то прямоугольные треугольники BAD и $B_1A_1D_1$ также подобны ($\angle A = \angle A_1$ и $\angle D = \angle D_1$); поэтому:

$$\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

166. Делительный циркуль. На подобии треугольников основано употребление делительного циркуля, посредством которого можно быстро разделить данный небольшой отрезок на несколько равных частей.

Прибор этот состоит из двух одинаковых ножек (рис. 176) Ab и Ba, концы которых заострены. Вдоль ножек сделаны прорезы, в которых можно передвигать подвижный винт и закреплять его в том или другом месте ножек. Ножки можно раздвигать и сближать, вращая их вокруг винта. Положим, требуется разделить отрезок AB на три равные части. Для этого укрепим винт в такой точке O, чтобы расстояние AO было в 3 раза более расстояния OB (что легко выполнить по тем делениям и цифрам, которые проставлены по краям прореза). Затем растворяем циркуль и располагаем его так, как указано на рисунке. Тогда расстояние между остриями a и b будет составлять $1/3$ длины AB, так как из подобия треугольников AOB и aOb следует:

$$ab : AB = Ob : OA = 1 : 3.$$

Остается затем, перевернув циркуль, отложить на отрезке AB 3 раза отрезок ab.

167. Поперечный масштаб. На свойствах подобных треугольников основано также приготовление поперечного масштаба, устройство которого понятно из рис. 177.

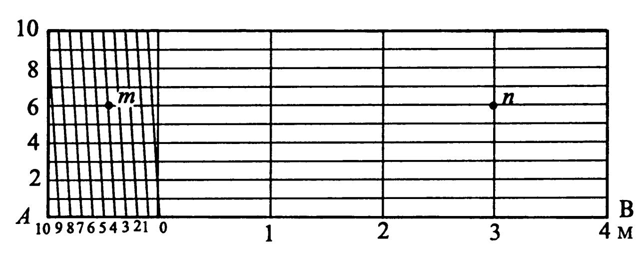


Рис. 177

Пусть крупные деления линии AB представляют в уменьшенном виде **метры**. Тогда мелкие деления представляют дециметры. Чтобы получить сантиметры, пришлось бы подразделить мелкие деления еще на 10 равных частей, что, по причине малости этих частей, было бы невыполнимо на линейном масштабе (т. е. на самой линии AB). Поперечный масштаб позволяет отсчитывать и сантиметры. Для разъяснения этого изобразим отдельно в увеличенном виде (рис. 178) тот узкий прямоугольный треугольник, который на нашем рисунке расположен направо.

Рис. 178

Параллельные линии отсекают от этого треугольника подобные треугольники, и потому мы можем написать пропорции:

$$de : ab = ce : cb = 1 : 10;$$

$$fh : ab = ch : cb = 2 : 10 \text{ и т. д.}$$

значит

$$de = \frac{1}{10}ab; \quad fh = \frac{2}{10}ab \text{ и т. д.}$$

Теперь понятно, что если мы возьмем на нашем масштабе циркулем отрезок, положим, от точки m до точки n (рис. 177), то этот отрезок составит:

$$3 \text{ м } 4 \text{ дм } 6 \text{ см} = 3{,}46\text{м}.$$

3. ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

168. Определение. Два одноименных многоугольника *) называются **подобными**, если углы одного равны соответственно углам другого, а стороны, заключающие равные углы, пропорциональны. Это значит, что если многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 180), то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$ и

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

При этом стороны многоугольников AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CD и C_1D_1 и т. д. называются сходственными сторонами.

Что такие многоугольники возможны, будет видно из решения следующей задачи.

169. Задача. *Дан многоугольник $ABCDE$ и отрезок a. Построить другой многоугольник, который был бы подобен данному и у которого сторона, сходственная стороне AB данного многоугольника, равнялась бы a* (рис. 179).

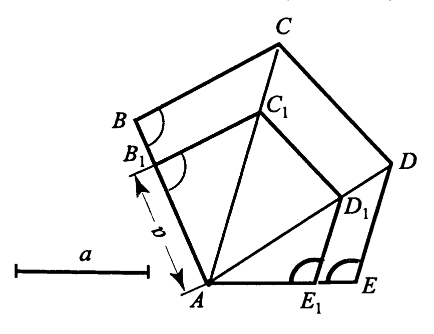


Рис. 179

Всего проще это можно сделать так. На стороне AB отложим $AB_1 = a$ (если $a > AB$, то точка B_1 расположится на продолжении AB). Затем, проведя из A все диагонали, построим $B_1C_1 \| BC$, $C_1D_1 \| CD$ и $D_1E_1 \| DE$.

Тогда получим многоугольник $AB_1C_1D_1E_1$, подобный многоугольнику $ABCDE$.

Действительно, во-первых, углы одного из них соответственно равны углам другого; так, угол A у них общий, $\angle B_1 = \angle B$ и $\angle E_1 = \angle E$ как соответственные углы при параллельных прямых; $\angle C_1 = \angle C$ и $\angle D_1 = \angle D$, так как углы эти состоят из частей, соответственно равных друг другу.

Во-вторых, мы имеем пропорции:

из подобия треугольников AB_1C_1 и ABC : $\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC}$

[5pt]” ” ” AC_1D_1 и ACD : $\frac{AC_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{AD_1}{AD}$

[5pt]” ” ” AD_1E_1 и ADE : $\frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}$

*) Одноименными называются многоугольники, имеющие одинаковое число углов, а следовательно, и сторон.

Так как третье отношение первого ряда равно первому отношению второго ряда и третье отношение второго ряда равно первому отношению третьего ряда, то значит, все 9 отношений равны между собой. Выбросив из них отношения, в которые входят диагонали, можем написать:

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{D_1E_1}{DE} = \frac{AE_1}{AE}.$$

Мы видим, таким образом, что у одноименных многоугольников $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ углы соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны; значит, многоугольники эти подобны.

170. З а м е ч а н и е. Для треугольников, как мы видели (§ 161), равенство углов влечет за собой пропорциональность сторон, и обратно: пропорциональность сторон влечет за собой равенство углов; вследствие этого для треугольников одно равенство углов или одна пропорциональность сторон служит достаточным признаком их подобия. Для многоугольников же одного равенства углов или одной пропорциональности сторон еще недостаточно для их подобия: например, у квадрата и прямоугольника углы равны, но стороны не пропорциональны, у квадрата же и ромба стороны пропорциональны, а углы не равны.

171. Т е о р е м а (о разложении подобных многоугольников на подобные треугольники). ***Подобные многоугольники можно разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников.***

Например, подобные многоугольники $ABCDE$ и $AB_1C_1D_1E_1$ (рис. 179) разделены диагоналями на подобные треугольники, одинаково расположенные.

Укажем еще такой способ разложения. Возьмем внутри многоугольника $ABCDE$ (рис. 180) произвольную точку O и соединим ее со всеми вершинами. Тогда многоугольник $ABCDE$ разобьется на столько треугольников, сколько в нем сторон. Возьмем один из них, например AOE (покрытый на рисунке штрихами), и на сходственной стороне A_1E_1 другого многоугольника построим углы $O_1A_1E_1$ и $O_1E_1A_1$, соответственно равные углам OAE и OEA; точку пересечения O_1 соединим с прочими вершинами многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$. Тогда и этот многоугольник разобьется на то же число треугольников. Докажем, что треугольники первого многоугольника соответственно подобны треугольникам второго многоугольника. ΔAOE подобен $\Delta A_1O_1E_1$ по построению.

Чтобы доказать подобие соседних треугольников ABO и $A_1B_1O_1$,

примем во внимание, что из подобия многоугольников следует:

$$\angle BAE = \angle B_1A_1E_1 \quad \text{и} \quad \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AE}{A_1E_1}, \tag{1}$$

и из подобия треугольников AOE и $A_1O_1E_1$ выводим:

$$\angle OAE = \angle O_1A_1E_1 \quad \text{и} \quad \frac{AO}{A_1O_1} = \frac{AE}{A_1E_1},. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует:

$$\angle BAO = \angle B_1A_1O_1 \quad \text{и} \quad \frac{BA}{B_1A_1} = \frac{AO}{A_1O_1}.$$

Теперь видим, что треугольники ABO и $A_1B_1O_1$ имеют по равному углу, заключенному между пропорциональными сторонами; значит, они подобны.

Совершенно так же докажем подобие треугольников BCO и $B_1C_1O_1$ затем треугольников COD и $C_1O_1D_1$, и т. д. При этом очевидно, что подобные треугольники в обоих многоугольниках одинаково расположены.

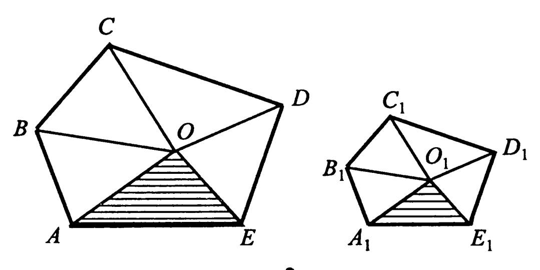


Рис. 180

172. Теорема (об отношении периметров подобных многоугольников). ***Периметры подобных многоугольников относятся, как сходственные стороны.***

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 180) подобны; тогда по определению:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EA}{E_1A_1}.$$

Если имеем ряд равных отношений, то сумма всех предыдущих членов относится к сумме всех последующих, как какой-нибудь из предыдущих членов относится к своему последующему, поэтому

$$\frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1E_1 + E_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots.$$

173. Коэффициент подобия. Отношение сходственных сторон двух подобных многоугольников (или треугольников) называется **коэффициентом подобия** этих многоугольников (или треугольников).

174. Подобное преобразование многоугольников. Построение многоугольника, подобного данному, при заданном коэффициенте подобия называется подобным преобразованием данного многоугольника.

Способ построения многоугольника, подобного данному, изложенный в § 169, является частным видом подобного преобразования. Общий метод (такого преобразования) состоит в следующем. Пусть требуется подобно преобразовать четырехугольник $ABCD$ (рис. 181) при коэффициенте подобия, равном k. Возьмем какую-нибудь точку O на плоскости; соединив ее с вершинами данного четырехугольника, получим прямые OA, OB, OC и OD. На прямой OA отложим от точки O в сторону точки A отрезок OA_1, равный $k \cdot OA$, так что $OA_1 = k \cdot OA$ (на рисунке $k = 5/3$).

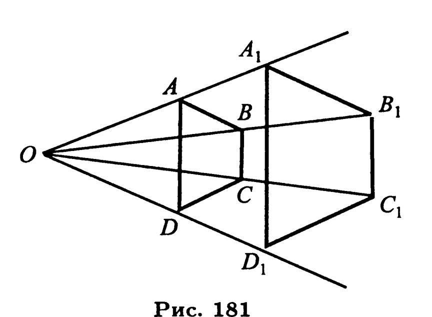


Рис. 181

Продолжим также прямую OB и отложим на ней от точки O в сторону точки B отрезок OB_1, равный $k \cdot OB$, так что $OB_1 = k \cdot OB$.

Точно так же поступим с прямыми OC и OD. Мы получим на них точки C_1 и D_1, причем $OC_1 = k \cdot OC$ и $OD_1 = k \cdot OD$. Соединив последовательно точки A_1, B_1 C_1 и D_1, получим искомый четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. В самом деле, из равенств $OA_1 = k \cdot OA$, $OB_1 = k \cdot OB$, $OC_1 = k \cdot OC$ и $OD_1 = k \cdot OD$ следует:

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = k.$$

Сравним треугольники OAB и OA_1B_1. Они имеют общий угол в вершине O и, кроме того,

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OB_1}{OB},$$

следовательно, эти треугольники подобны (§ 161, 2-й случай). Из их подобия заключаем:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = k \quad \text{и} \quad \angle OAB = \angle OA_1B_1, \tag{1}$$

следовательно, $AB \| A_1B_1$ (§ 73).

Совершенно так же покажем, что треугольники OBC и OB_1C_1 подобны. Отсюда следует:

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB} = k, \quad \angle OBC = \angle OB_1C_1, \tag{2}$$

и, следовательно, $BC \| B_1C_1$.

Таким же образом докажем подобие следующих треугольников: OCD и OC_1D_1, затем треугольников OAD и OA_1D_1. Из подобия $\triangle OCD$ и $\triangle OC_1D_1$ следует:

$$\frac{C_1D_1}{CD} = \frac{OC_1}{OC} = k \quad \text{и} \quad CD \| C_1D_1. \tag{3}$$

Из подобия $\triangle OAD$ и $\triangle OA_1D_1$ следует:

$$\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{OD_1}{OD} = k \quad \text{и} \quad AD \| A_1D_1. \tag{4}$$

Из равенств (1), (2), (3) и (4) следует:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD} = k.$$

Кроме того, $\angle DAB = \angle D_1A_1B_1$ как углы с параллельными сторонами (§ 79).

По той же причине имеем равенство углов:

$$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1,$$
$$\angle BCD = \angle B_1C_1D_1,$$
$$\angle CDA = \angle C_1D_1A_1.$$

Мы видим, что у четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ углы соответственно равны и сходственные стороны пропорциональны; значит, эти четырехугольники подобны, причем коэффициент их подобия равен k.

175. Центр подобия. При подобном преобразовании многоугольника способом, изложенным в § 147, точка O называется центром подобия обоих многоугольников.

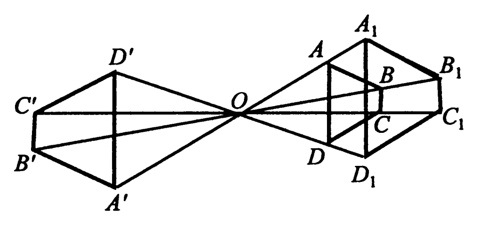


Рис. 182

Подобное преобразование многоугольника можно выполнять несколько иначе. Именно, взяв точку O и соединив ее с вершинами четырехугольника $ABCD$, можно продолжить прямые OA, OB, ... за точку O; затем на прямой OA от точки O в сторону,

противоположную точке A, отложим отрезок OA', равный $k \cdot OA$. Точно так же на продолжениях прямых OA, $OC, \ldots$ от точки O отложим отрезки OB', $OC', \ldots$, равные соответственно отрезкам $k \cdot OB$, $k \cdot OC, \ldots$ (рис. 182); соединив последовательно точки A', B', C', D', получим четырехугольник $A'B'C'D'$, очевидно симметричный с $A_1B_1C_1D_1$ относительно точки O. Следовательно, четырехугольники $A'B'C'D'$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны и, значит, четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны, причем коэффициент их подобия равен k. При первом способе преобразования точка O называется внешним центром подобия многоугольников (рис. 181); при втором способе — внутренним центром их подобия (рис. 182).

Замечание. При выполнении преобразования можно одинаково пользоваться как внутренним, так и внешним центром подобия. И тот и другой можно выбирать совершенно произвольно, в частности, если принять одну из вершин многоугольника за внешний центр подобия и выполнить подобное преобразование, то получим как раз тот способ построения подобного многоугольника, который был изложен в § 169.

176. Перспективное расположение подобных многоугольников. Расположение двух многоугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ на рис. 181, а также многоугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ на рис. 182 имеет следующие свойства: 1) сходственные стороны обоих многоугольников параллельны; 2) прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке.

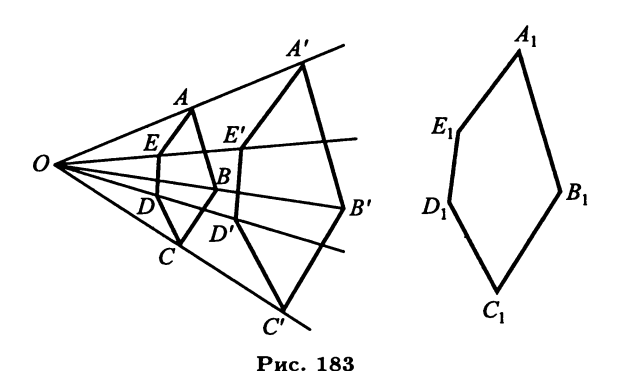


Рис. 183

Такое расположение двух многоугольников называется перспективным. Докажем, что в такое расположение можно привести любые два подобных многоугольника.

Пусть даны два подобных многоугольника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 183). Возьмем какую-либо точку O за центр подобия и построим многоугольник, подобный и перспективный с $ABCDE$, причем коэффициент

подобия возьмем равным отношению $\frac{A_1B_1}{AB}$. Мы получим многоугольник $A'B'C'D'E'$, подобный $ABCDE$ и в то же время равный $A_1B_1C_1D_1E_1$. В самом деле, так как коэффициент подобия многоугольников $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ равен $\frac{A_1B_1}{AB}$, то $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A_1B_1}{AB}$, отсюда $A'B' = AB$. Но многоугольники $A_1B_1C_1D_1E_1$ и $A'B'C'D'E'$ подобны между собой, следовательно:

$$\frac{A'B'}{A_1B_1} = \frac{B'C'}{B_1C_1} = \frac{C'D'}{C_1D_1} = \frac{D'E'}{D_1E_1} = \frac{A'E'}{A_1E_1}.$$

А потому из равенства $A'B' = A_1B_1$ вытекает $B'C' = B_1C_1$, $C'D' = C_1D_1$, $D'E' = D_1E_1$, $A'E' = A_1E_1$. Так как, кроме того, углы многоугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ равны соответствующим углам многоугольника $A'B'C'D'E'$, то эти многоугольники равны между собой. Если наложить многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ на $A'B'C'D'E'$ так, чтобы они совпадали, то многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ примет перспективное расположение с $ABCDE$.

4. ПОДОБИЕ ФИГУР ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА

177. Способ подобного преобразования многоугольников, изложенный выше, дает возможность обобщить самое понятие о подобии на случай, когда фигура образована кривыми линиями. Именно такой способ построения подобной фигуры можно применить к любой фигуре. Пусть, например, на плоскости дана фигура A совершенно произвольной формы (рис. 184).

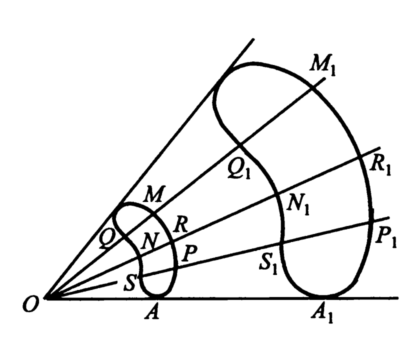


Рис. 184

Возьмем произвольную точку O на плоскости этой фигуры и будем соединять ее с различными точками $M, N, P, \ldots$ фигуры A. На каждой из проведенных прямых $OM, ON, OP, \ldots$ отложим отрезки OM_1, ON_1, OP_1, такие, что

$$\frac{OM_1}{OM} = \frac{ON_1}{ON} = \frac{OP_1}{OP} = \ldots \text{и т. д.}$$

Точки $M_1, N_1, P_1, \ldots$ будут лежать на некоторой новой фигуре A_1. Чем больше точек $M, N, P, \ldots$ мы возьмем на фигуре A, тем больше мы получим точек фигуры A_1.

Чтобы получить всю фигуру A_1, нужно провести прямые из точки O ко всем точкам фигуры A и построить на них соответствующие точки фигуры A_1. Вся полученная таким образом фигура A_1 называется фигурой, подобной A. В отдельных случаях, чтобы получить фигуру A_1, нет необходимости проводить лучи ко всем точкам фигуры A, достаточно построить лишь несколько ее точек, и затем, пользуясь частными свойствами фигуры A, восстановить всю фигуру A_1. Так, в том случае, когда A — многоугольник, достаточно было соединить точку O лишь с вершинами

этого многоугольника и построить вершины подобного многоугольника, а затем соединить прямолинейными отрезками полученные вершины между собой. Такой переход от фигуры A к фигуре A_1 называется подобным преобразованием фигуры A. Подобное преобразование фигур является одним из весьма важных видов геометрических преобразований, имеющих огромное применение на практике. Показываемая в кино картина на экране подобна изображению, сделанному на пленке; технические чертежи планов и фасадов зданий, планов местности, планов городов и т. п. получаются в результате подобного преобразования.

178. Подобие окружностей. Докажем, что фигура, подобная окружности, есть также окружность.

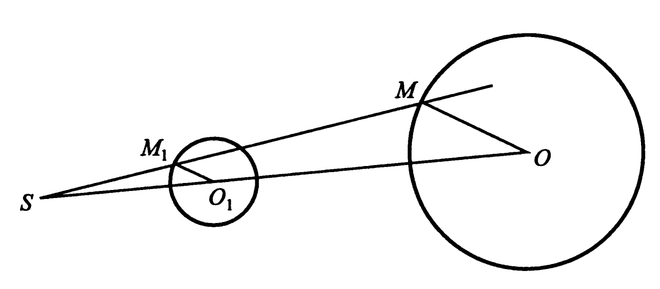


Рис. 185

Теорема. ***Геометрическое место точек, делящих в данном отношении отрезки лучей, соединяющих какую-нибудь точку с точками окружности, есть окружность.***

Пусть дана окружность радиуса R с центром в точке O (рис. 185). Возьмем произвольную точку S и, соединив ее с точкой O, разделим отрезок SO точкой O_1 в некотором отношении так, что $\dfrac{SO_1}{SO} = k$.

Возьмем произвольную точку M на данной окружности и соединим ее с точкой S. На отрезке SM найдем точку M_1 такую, что $\dfrac{SM_1}{SM} = \dfrac{SO_1}{SO} = k$. Для этой цели следует из точки O_1 провести прямую, параллельную OM, до пересечения с прямой SM. Из подобия треугольников SOM и SO_1M_1 следует $\dfrac{OM_1}{OM} = \dfrac{SO_1}{SO}$. Следовательно, $\dfrac{OM_1}{OM} = k$. Отсюда найдем длину отрезка O_1M_1, именно $O_1M_1 = k \cdot OM$, или $O_1M_1 = k \cdot R$.

Мы видим, что величина O_1M_1 есть некоторая постоянная величина, не зависящая от положения точки M на данной окружности. Следовательно, если точка M будет перемещаться по окружности, то точка M_1 будет перемещаться по плоскости, описывая окружность с центром O_1 и радиусом kR.

179. Теорема. ***Две окружности на плоскости всегда можно рассматривать как перспективно-подобные фигуры, причем они имеют два центра подобия: один внешний, другой внутренний.***

Пусть даны две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2 (рис. 186). Проведем линию центров O_1O_2 и построим на ней две точки I и E, определяемые равенствами

$$\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{и} \quad \frac{O_1E}{O_2E} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Легко заметить, что точки I и E обладают свойствами центров подобия. Возьмем какую-либо точку M_1 на первой окружности, проведем прямую IM_1 и отложим на ней отрезок IM_2 так, что $IM_1 : IM_2 = R_1 : R_2$, $\Delta IO_1M_1 \backsim \Delta IO_2M_2$, так как $\angle O_1IM_1 = \angle O_2IM_2$, $\dfrac{IM_1}{IM_2} = \dfrac{R_1}{R_2}$ и $\dfrac{O_1I}{O_2I} = \dfrac{R_1}{R_2}$, следовательно,

$$\frac{O_1M_1}{O_2M_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad \text{и так как } O_1M_1 = R_1, \text{то } O_2M_2 = R_2.$$

Это значит, что точка M_2 лежит на второй окружности. Следовательно, точка I есть внутренний центр подобия данных окружностей. Таким же образом можно доказать, что E есть внешний центр подобия.

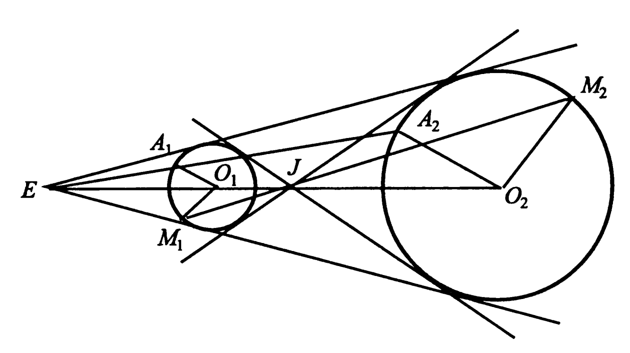


Рис. 186

Построение точек I и E можно выполнить так: проводим в данных окружностях два каких-либо параллельных радиуса и соединяем их концы, полученная прямая пересечет линию центров в центре подобия. При этом если проведенные радиусы направлены в одну сторону (рис. 186) (O_1A_1, и O_2A_2), то центр подобия будет внешним; если они направлены в противоположные стороны (рис. 186) (O_1M_1 и O_2M_2), то центр подобия будет внутренним. Легко далее заметить, что если две окружности касаются, то один из центров подобия совпадает с точкой касания. При этом если касание окружностей внешнее, то в точке касания находится внутренний центр подобия, если же касание внутреннее, то с точкой касания совпадает внешний центр подобия окружностей.

Упражнение 1. Доказать, что если две окружности лежат одна вне другой, то их внешний центр подобия совпадает с точкой пересечения их общих внешних касательных, а внутренний — с точкой пересечения общих внутренних касательных.

2. Какое положение должны иметь две окружности на плоскости, чтобы их внешний центр подобия совпал с внутренним?

Ответ. Окружности концентричны.

180. Пантограф. Подобное преобразование фигур можно выполнять механически с помощью особого прибора, изобретенного в 1603 г. Христофором Шейнером и названного им пантографом.

Вообразим параллелограмм $ABCD$ (рис. 187), сторонами которого служат металлические стержни, могущие на шарнирах вращаться вокруг вершин. Укрепим неподвижно вершину A, возьмем на продолжении BC произвольную точку E и заставим эту точку описать какую-либо линию EE'. Пусть F — точка пересечения прямых AE и CD и $AB'C'D'$ — новое положение нашего шарнирного параллелограмма. Так как длина сторон параллелограмма и длина отрезков CE и CF при перемещении точки E не изменялись, то можем написать последовательно следующие пропорции:

$$\frac{AD}{CE} = \frac{DF}{FC} = \frac{AF}{FE} \quad (\text{так как} \quad \triangle ADF \backsim \triangle ECF); \quad \frac{AD'}{C'E'} = \frac{D'F'}{F'C'}.$$

Отсюда следует, что $\triangle AD'F' \backsim \triangle E'C'F'$; следовательно, $\angle AF'D' = \angle E'F'C'$ т.е. точки A, F' и E' лежат на одной прямой. Далее, из подобия тех же треугольников имеем, что $\frac{AF'}{F'E'} = \frac{D'F'}{F'C'}$, но

$$\frac{D'F'}{F'C'} = \frac{DF}{FC} = \frac{AF}{FE};$$

следовательно, $\frac{AF'}{F'E'} = \frac{AF}{FE}$.

Отсюда следует, что треугольники AEE' и AFF' подобны, следовательно, $\angle AFF' = \angle AEE'$ и $EE' \| FF'$.

Далее из рисунка находим:

$$\frac{AF}{FE} = \frac{BC}{CE} \quad \text{и} \quad \frac{AF'}{F'E'} = \frac{B'C'}{C'E'}.$$

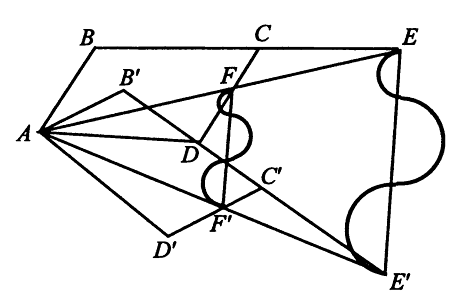


Рис. 187

Составляя производные пропорции, можем написать:

$$\frac{AF + FE}{AF} = \frac{BC + CE}{BC}$$

и

$$\frac{AF' + F'E'}{B'C'},$$

или

$$\frac{AE}{AF} = \frac{BE}{BC} \quad \text{и} \quad \frac{AE'}{AF'} = \frac{B'E'}{B'C'}.$$

Но $BE = B'E'$ и $BC = B'C'$, следовательно,

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AE'}{AF'} = \frac{BE}{BC}.$$

Это равенство показывает, что когда точка E опишет какую-либо фигуру, точка F опишет подобную фигуру, причем коэффициент подобия этих фигур равен отношению $\frac{BE}{BC}$. Если в точке E укрепить острие иглы, а в F — острие карандаша, то при обводе острием иглы контура фигуры острие карандаша зарисует на бумаге контур фигуры подобной. Для изменения показателя подобия следует переместить точку E по прямой BC в ту или другую сторону. На этом свойстве шарнирного параллелограмма и основано устройство пантографа, общий вид которого представлен на рис. 188. Прибор применяется при перерисовке планов в различных масштабах.

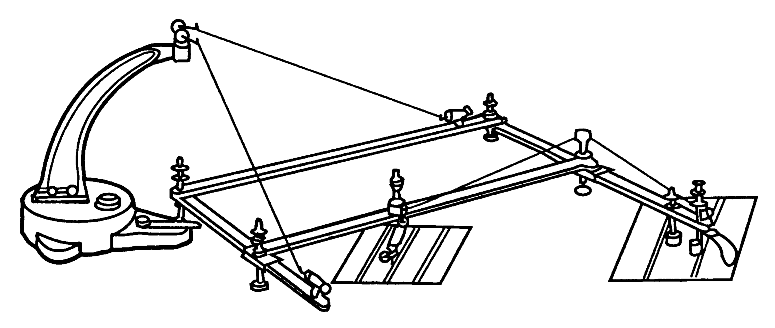


Рис. 188

Для подобного преобразования фигур небольшого размера и несложной формы можно пользоваться также делительным циркулем (§ 166). Для этого следует установить подвижной винт циркуля так, чтобы он делил всю длину ножки в отношении, равном заданному коэффициенту подобия, затем выбрать центр подобия и соединить его лучами с основными точками фигуры. На каждом луче следует измерить одним раствором циркуля отрезок от центра подобия до точки фигуры и, перевернув циркуль, отложить на том же луче от центра подобия отрезок, полученный в другом растворе. Таким способом можно перечертить все основные точки данной фигуры и получить ее очертание в нужном размере.

Задачи на построение

181. Метод подобия. Подобное преобразование фигур можно с успехом применить к решению многих задач на построение. На этом основан так называемый метод подобия.

Метод подобия состоит в том, что, пользуясь некоторыми данными задачи, строят сначала фигуру, подобную искомой, а затем переходят к искомой. Этот метод особенно удобен тогда, когда только одна

данная величина есть длина, а все прочие величины — или углы, или отношения линий; таковы, например, задачи: построить треугольник по данному углу, стороне и отношению двух других сторон или по двум углам и длине некоторого отрезка (высоте, медиане, биссектрисе и т. п.); построить квадрат по данной сумме или разности между диагональю и стороной и т. п.

Решим, например, такую задачу:

Задача 1. *Построить треугольник, когда даны один из его углов C, отношение сторон $AC : BC$, заключающих этот угол, и высота h, опущенная из вершины этого угла на противоположную сторону* (рис. 189).

Пусть $AC : BC = m : n$, где m и n — два данных отрезка или два данных числа. Строим угол C, на его сторонах откладываем отрезки CA_1 и CB_1, пропорциональные m и n. Если m и n — отрезки, то берем прямую $CA_1 = m$ и $CB_1 = n$. Если m и n — числа, то, выбрав произвольный отрезок l, строим отрезки $CA_1 = ml$ и $CB_1 = nl$.

В обоих случаях имеем $CA_1 : CB_1 = m : n$.

Треугольник CA_1B_1, очевидно, подобен искомому треугольнику.

Чтобы получить искомый треугольник, построим в треугольнике CA_1B_1 высоту CD_1, обозначим ее через h_1. Выбираем теперь произвольный центр подобия и строим треугольник, подобный треугольнику A_1B_1C с коэффициентом подобия, равным отношению $\frac{h}{h_1}$, где h — данная высота искомого треугольника. Полученный таким путем треугольник и будет искомым.

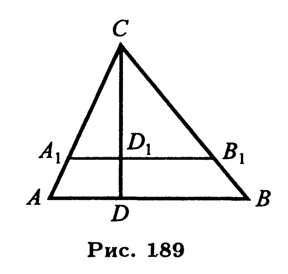


Рис. 189

Удобнее всего выбрать центр подобия прямо в точке C. В таком случае построение искомого треугольника становится особенно простым (рис. 189). Продолжаем высоту CD_1 треугольника A_1B_1C, откладываем на ней отрезок CD, равный h, и проводим прямую AB, параллельную A_1B_1.

Треугольник ABC — искомый.

В задачах этого рода положение искомой фигуры остается произвольным; но во многих вопросах требуется построить фигуру, положение которой относительно данных точек или линий вполне определено. При этом может случиться, что, отрешившись от какого-нибудь одного из условий положения и оставив все остальные, мы получим бесчисленное множество фигур, подобных искомой. В таком случае метод подобия может быть употреблен с пользой. Приведем примеры.

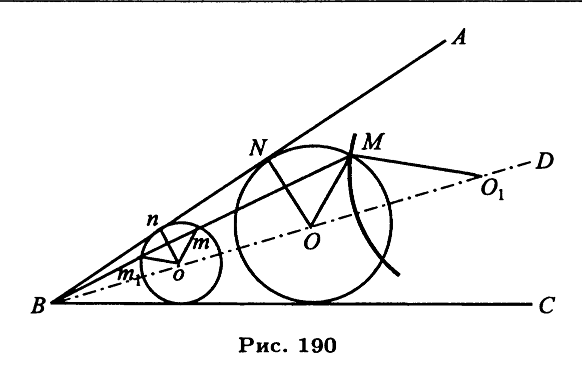


Рис. 190

З а д а ч а 2. *В данный угол ABC вписать окружность, которая проходила бы через данную точку M* (рис. 190).

Отбросим на время требование, чтобы окружность проходила через точку M. Тогда данному условию удовлетворяет бесчисленное множество окружностей, центры которых лежат на биссектрисе BD. Построим одну из таких окружностей, например ту, центр которой есть o. Возьмем на ней точку m, с х о д с т в е н н у ю точке M, т. е. лежащую на луче MB, и проведем радиус mo. Если теперь построим $MO \| mo$, то точка O будет центром искомого круга. Действительно, проведя к стороне AB перпендикуляры ON и on, мы получим подобные треугольники MBO и mBo, NBO и nBo, из которых будем иметь:

$$MO : mo = BO : Bo; \quad NO : no = BO : Bo,$$

откуда

$$MO : mo = NO : no.$$

Но $mo = no$; следовательно, $MO = NO$, т. е. окружность, описанная радиусом OM с центром O, касается стороны AB; а так как ее центр лежит на биссектрисе угла, то она касается и стороны BC.

Если за сходственную точку возьмем другую точку m_1 пересечения луча MB с окружностью o, то найдем другой центр O искомого круга. Следовательно, задача допускает два решения.

З а д а ч а 3. *В данный треугольник ABC вписать ромб с данным острым углом так, чтобы одна из его сторон лежала на основании AB треугольника ABC, а две его вершины — на боковых сторонах AC и BC* (рис. 191).

Отбросим на время требование, чтобы одна из вершин ромба лежала на стороне BC. Тогда можно построить бесчисленное множество ромбов, удовлетворяющих остальным условиям задачи. Построим один из них.

Берем на стороне AC произвольную точку M. Строим угол с вершиной в этой точке, равный данному, одна сторона которого была бы параллельна основанию AB, а другая пересекала основание AB в некоторой точке N. На стороне AB от точки N откладываем отрезок NP, равный MN, и строим ромб со сторонами MN и NP.

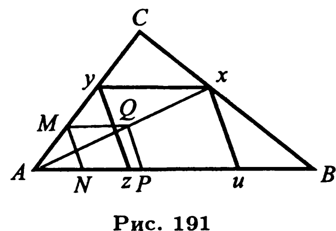


Рис. 191

Пусть Q — его четвертая вершина. Далее, выбираем вершину A за центр подобия и строим ромб, подобный ромбу $MNPQ$, выбирая коэффициент подобия так, чтобы вершина нового ромба, соответствующая вершине Q, оказалась на стороне BC. Для этой цели продолжаем прямую AQ до пересечения со стороной BC в некоторой точке x. Эта точка x будет одной из вершин искомого ромба.

Проводя из этой точки прямые, параллельные сторонам ромба $MNPQ$, получаем искомый ромб $xyzu$.

Предоставляем самим учащимся решить методом подобия следующие задачи:

1. Построить треугольник, зная два его угла и радиус описанной окружности.

2. Построить треугольник, зная отношение высоты к основанию, угол при вершине и медиану боковой стороны.

3. Дан $\angle AOB$ и внутри него точка C. Найти на стороне OB точку M, равно отстоящую от OA и от точки C.

5. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ

182. Теорема. ***Стороны угла** (ABC)**, пересекаемые рядом параллельных прямых** ($DD_1, EE_1, EF_1, \ldots$)**, рассекаются ими на пропорциональные части*** (рис. 192).

Требуется доказать, что

$$\frac{BD}{BD_1} = \frac{DE}{D_1E_1} = \frac{EF}{E_1F_1},$$

или

$$BD : DE = BD_1 : D_1E_1;$$

$$DE : EF = D_1E_1 : E_1F_1 \quad \text{и т.д.}$$

Проводя вспомогательные прямые DM, EN и т.д., параллельные BA, мы получим треугольники BDD_1, DEM, EFN и т.д., которые

все подобны между собой, так как углы у них соответственно равны (вследствие параллельности прямых). Из их подобия следует:

$$\frac{BD}{BD_1} = \frac{DE}{DM} = \frac{EF}{EN} \quad \text{и т. д.}$$

Заменив в этом ряду равных отношений отрезок DM на D_1E_1, отрезок EN на E_1F_1 и т. д. (противоположные стороны параллелограммов равны), мы получим то, что требовалось доказать.

183. Теорема. ***Две параллельные прямые*** (MN, M_1N_1, рис. 193), ***пересекаемые рядом прямых*** ($OA, OB, OC, \ldots$), ***исходящих из одной и той же точки*** (O), ***рассекаются ими на пропорциональные части.*** Требуется доказать, что отрезки AB,

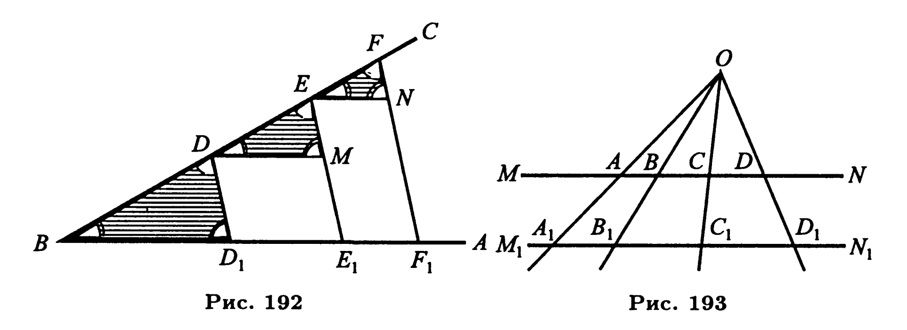


Рис. 192 Рис. 193

BC, $CD, \ldots$ прямой MN пропорциональны отрезкам A_1B_1, B_1C_1, $C_1D_1, \ldots$ прямой M_1N_1.

Из подобия треугольников OAB и $O_1A_1B_1$ (§ 159) и треугольников OBC и OB_1C_1 выводим:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BO}{B_1O_1} \quad \text{и} \quad \frac{BO}{B_1O} = \frac{BC}{B_1C_1},$$

откуда

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

Подобным же образом доказывается пропорциональность и прочих отрезков.

184. Задача. *Разделить отрезок прямой* AB (рис. 194) *на три части в отношении* $m : n : p$, *где* m, n, p — *данные отрезки или данные числа.*

Проведя луч AC под произвольным углом к AB, отложим на нем от точки A отрезки, равные отрезкам m, n и p. Точку F —

конец отрезка p — соединяем с B прямой BF и через концы G и H отложенных отрезков проводим прямые GD и HE, параллельные BF. Тогда отрезок AB разделится в точках D и E на части в отношении $m : n : p$. Если m, n и p означают какие-нибудь числа, например 2, 5, 3, то построение выполняется так же, с той лишь разницей, что на AC откладываются отрезки, равные 2, 5 и 3 произвольным единицам длины.

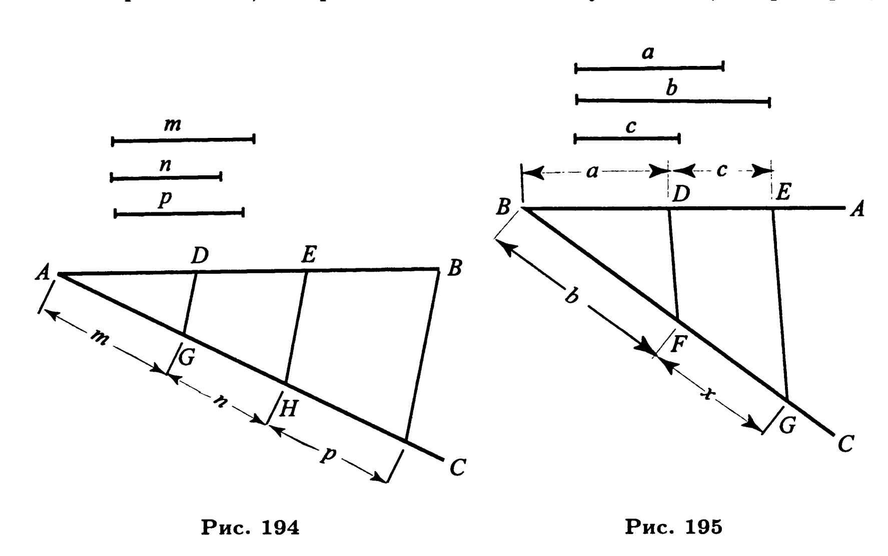


Рис. 194 **Рис. 195**

Конечно, указанное построение применимо к делению отрезка не только на три части, но на какое угодно иное число частей.

185. Задача. *К трем данным отрезкам a, b и c найти четвертый пропорциональный* (рис. 195), т. е. найти такой отрезок x, который удовлетворял бы пропорции:

$$a : b = c : x.$$

На сторонах произвольного угла ABC откладываем отрезки: $BD = a$, $BF = b$, $DE = c$. Проведя затем через D и F прямую, построим $EG \| DF$. Отрезок FG будет искомый.

Свойство биссектрисы угла треугольника

186. Теорема. ***Биссектриса** (BD, рис. 196) **любого угла треугольника** (ABC) **делит противоположную сторону на части** (AD и CD), **пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.***

Требуется доказать, что если $\angle ABD = \angle DBC$, то $AD : DC = AB : BC$.

Проведем $CD \| BD$ до пересечения в точке E с продолжением стороны AB. Тогда, согласно теореме § 182, мы будем иметь пропорцию:

$$AD : DC = AB : BE.$$

Чтобы от этой пропорции перейти к той, которую требуется доказать, достаточно обнаружить, что $BE = BC$, т. е. что $\triangle BCE$ равнобедренный. В этом треугольнике $\angle E = \angle ABD$ (как углы, соответственные при параллельных прямых) и $\angle BCE = \angle DBC$ (как углы, накрест лежащие при тех же параллельных прямых). Но $\angle ABD = \angle DBC$ по

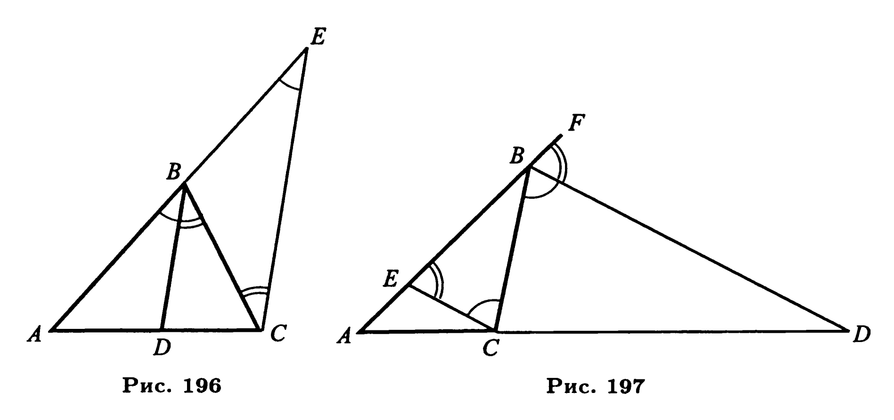


Рис. 196 Рис. 197

условию; значит, $\angle E = \angle BCE$, а потому равны и стороны BC и BE, лежащие против равных углов. Теперь, заменив в написанной выше пропорции BE на BC, получим ту пропорцию, которую требуется доказать.

Численный пример. Пусть $AB = 10; BC = 7$ и $AC = 6$. Тогда, обозначив AD буквой x, можем написать пропорцию:

$$x : (6 - x) = 10 : 7;$$

отсюда найдем:

$$7x = 60 - 10x; \quad 7x + 10x = 60; \quad 17x = 60;$$
$$x = \frac{60}{17} = 3\frac{9}{17}.$$

Следовательно,

$$DC = 66 - x = 6 - 3\frac{9}{17} = 2\frac{8}{17}.$$

187. Теорема (выражающая свойство биссектрисы внешнего угла треугольника). ***Биссектриса*** (BD, рис. 197) ***внешнего угла*** (CBF) ***треугольника*** (ABC) ***пересекает продолжение противоположной стороны*** (AC) ***в такой точке*** (D), ***расстояния которой*** (DA и DC) ***до концов этой стороны пропорциональны прилежащим сторонам треугольника*** (AB и BC). Требуется доказать, что если $\angle CBD = \angle FBD$, то $DA : DC = AB : BC$.

Проведя $CE \| BD$, получим пропорцию:

$$DA : DC = BA : BE.$$

Так как $\angle BEC = \angle FBD$ (как соответственные), а $\angle BCE = \angle CBD$ (как накрест лежащие при параллельных прямых) и углы FBD и CBD равны по условию, то $\angle BEC = \angle BCE$; значит, $\triangle BCE$ равнобедренный, т. е. $BE = BC$. Подставив в пропорцию вместо BE равный отрезок BC, получим ту пропорцию, которую требовалось доказать:

$$DA : DC = AB : BC.$$

Примечание. Особый случай представляет биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, которая параллельна основанию.

6. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ФИГУР

188. Теорема. ***В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит гипотенузу, а каждый катет есть средняя пропорциональная между гипотенузой и прилежащим к этому катету отрезком гипотенузы.***

Пусть AD (рис. 198) есть перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла A на гипотенузу BC. Требуется доказать следующие три пропорции;

$$1)\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}; \quad 2)\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD}; \quad 3)\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}.$$

Первую пропорцию мы докажем из подобия треугольников ABD и ADC. Эти треугольники подобны, потому что

$$\angle 1 = \angle 4 \quad \text{и} \quad \angle 2 = \angle 3$$

вследствие перпендикулярности их сторон (§ 80). Возьмем в $\triangle ABD$ те стороны BD и AD, которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AD и DC*), поэтому

$$BD : AD = AD : DC.$$

Вторую пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ABD. Эти треугольники подобны, потому что они прямоугольные и острый угол B у них общий. В $\triangle ABC$ возьмем те стороны BC и AB, которые составляют первое отношение доказываемой пропорции; сходственными сторонами в $\triangle ABD$ будут AB и BD; поэтому

$$BC : AB = AB : BD.$$

Третью пропорцию докажем из подобия треугольников ABC и ADC. Эти треугольники подобны, потому что они оба прямоугольные и имеют общий острый угол C. В $\triangle ABC$ возьмем стороны BC и AC; сходственными сторонами в $\triangle ADC$ будут AC и DC; поэтому

$$BC : AC = AC : DC.$$

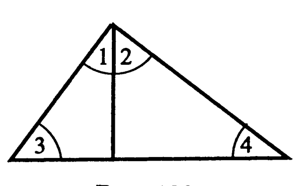


Рис. 198

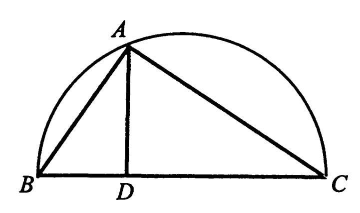


Рис. 199

189. Следствие. Пусть A (рис. 199) есть произвольная точка окружности, описанной на диаметре BC. Соединив концы диаметра с этой точкой, мы получим прямоугольный $\triangle ABC$, у которого гипотенуза есть диаметр, а катеты суть хорды (§ 125, 2). Применяя дока-

*) Чтобы безошибочно определить, какие стороны взятых треугольников сходственны между собой, полезно держаться такого пути:

1) указать углы, против которых лежат взятые стороны одного треугольника;

2) найти равные им углы в другом треугольнике;

3) взять противолежащие им стороны.

Например, для треугольников ABD и ADC рассуждаем так: в треугольнике ABD стороны BD и AD лежат против углов 1 и 3; в треугольнике ADC этим углам равны 4 и 2; против них лежат стороны AD и DC. Значит, стороны AD и DC сходственны со сторонами BD и AD.

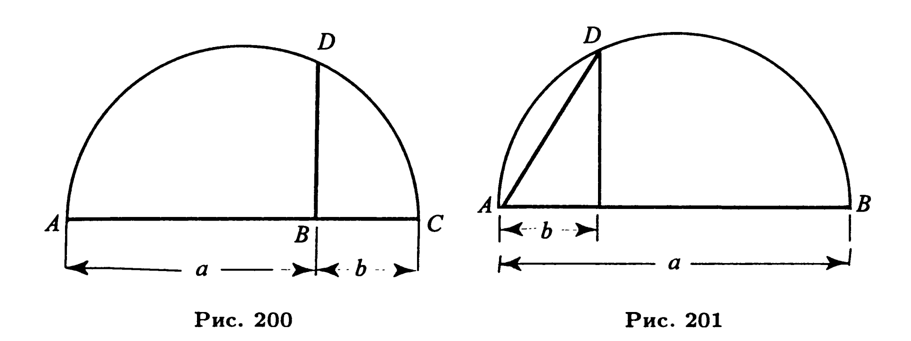


Рис. 200 **Рис. 201**

занную выше теорему к этому треугольнику, приходим к следующему заключению:

Перпендикуляр, опущенный из какой-либо точки окружности на диаметр, есть средняя пропорциональная величина между отрезками, на которые основание перпендикуляра делит диаметр, а хорда, соединяющая эту точку с концом диаметра, есть средняя пропорциональная между диаметром и прилежащим к хорде отрезком диаметра.

190. Задача. Построить отрезок, средний пропорциональный между двумя отрезками a и b.

Задачу эту можно решить двояким путем:

1) на произвольной прямой (рис. 200) откладываем отрезки $AB = a$ и $BC = b$; на AC, как на диаметре, описываем полуокружность; из B восставляем до пересечения с окружностью перпендикуляр BD. Этот перпендикуляр и есть искомая средняя пропорциональная между AB и BC.

2) на произвольной прямой (рис. 201) откладываем от точки A отрезки a и b. На большем из этих отрезков описываем полуокружность. Проведя из конца меньшего отрезка перпендикуляр к AB до пересечения его с окружностью в точке D, соединяем A с D. Хорда AD есть средняя пропорциональная между a и b.

191. Теорема Пифагора. Доказанные выше теоремы позволяют обнаружить замечательное соотношение между сторонами любого прямоугольного треугольника. Это соотношение было впервые замечено греческим геометром Пифагором (VI в. до н. э.) и носит поэтому его имя — теорема Пифагора.

Если стороны прямоугольного треугольника измерены одной и той же единицей, то квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.

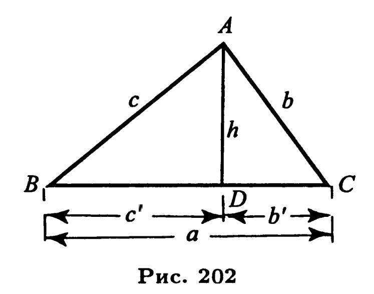


Рис. 202

Пусть ABC (рис. 202) есть прямоугольный треугольник, AD — перпендикуляр, опущенный на гипотенузу из вершины прямого угла. Положим, что стороны и отрезки гипотенузы измерены одной и той же единицей, причем получились числа a, b, c, c' и b' (принято длины сторон треугольника обозначать малыми буквами, соответствующими большим буквам, которыми обозначены противолежащие углы). Применяя теорему § 188, можем написать пропорции:

$$a : c = c : c' \quad \text{и} \quad a : b = b : b',$$

откуда

$$ac' = c^2 \quad \text{и} \quad ab' = b^2.$$

Сложив почленно эти два равенства, найдем:

$$ac' + ab' = c^2 + b^2, \quad \text{или} \quad a(c' + b') = c^2 + b^2.$$

Но $c' + b' = a$, следовательно,

$$a^2 = c^2 + b^2.$$

Эту теорему обыкновенно выражают сокращенно так: ***квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.***

Пример. Положим, что катеты, измеренные какой-нибудь линейной единицей, выражаются числами 3 и 4; тогда гипотенуза в той же единице выразится числом x, удовлетворяющим уравнению:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25,$$

откуда $x = \sqrt{25} = 5$.

Замечание. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называется часто египетским треугольником, так как он был известен еще древним египтянам. Так, их землемеры для построения прямого угла на земной поверхности пользовались таким приемом: бечевку посредством узлов они разделяли на 12 равных частей; затем, связав концы, натягивали ее на земле (посредством кольев) в виде треугольника со сторонами в 3, 4 и 5 делений; тогда угол между сторонами, равными 3 и 4, оказывался прямым*).

*) Прямоугольные треугольники, у которых стороны измеряются целыми числами, носят название пифагоровых треугольников. Можно доказать, что катеты x и y и гипотенуза z таких треугольников выражаются следующими формулами:

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2,$$

где a и b — произвольные целые числа при условии, что $a > b$.

Теорема Пифагора имеет еще другую формулировку, именно ту, которая была для нее получена самим Пифагором. С этой формулировкой мы познакомимся позднее (§ 257).

192. Следствие. *Квадраты катетов относятся между собой как прилежащие отрезки гипотенузы.* Действительно, из уравнений предыдущего параграфа находим:

$$c^2 : b^2 = ac' : ab' = c' : b'.$$

193. Замечание 1. К трем равенствам, которые мы вывели выше:

$$1)\ ac' = c^2; \quad 2)\ ab' = b^2 \quad \text{и} \quad 3)\ a^2 = b^2 + c^2,$$

можно присоединить еще следующие два:

$$4)\ b' + c' = a \quad \text{и} \quad 5)\ h^2 = b'c'$$

(если буквой h обозначим длину высоты AD). Из этих равенств третье, как мы видели, составляет следствие первых двух и четвертого, так что из пяти равенств только четыре независимы; вследствие этого можно по данным двум из шести чисел находить остальные четыре.

Для примера положим, что нам даны отрезки гипотенузы $b' = 5$ м и $c' = 7$ м; тогда

$$a = b' + c' = 12; \quad c = \sqrt{ac'} = \sqrt{12 \cdot 7} = \sqrt{84} = 9,165\ldots$$

$$b = \sqrt{ab'}\sqrt{12 \cdot 5} = \sqrt{60} = 7,745\ldots$$

$$h = \sqrt{c'b'} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{35} = 5,916\ldots.$$

Замечание 2. В последующих теоремах мы будем сокращенно говорить: «квадрат стороны» вместо: «квадрат числа, выражающего длину стороны», или: «произведение отрезков» вместо: «произведение чисел, выражающих длины отрезков». При этом будем подразумевать, что отрезки измерены одной и той же единицей.

194. Теорема. ***Во всяком треугольнике квадрат стороны, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее от вершины острого угла до высоты.***

Пусть BC — сторона $\triangle ABC$ (рис. 203 и 204), лежащая против острого угла A, и BD — высота, опущенная на какую-либо из остальных сторон, например на AC (или на продолжение AC). Требуется доказать, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD,$$

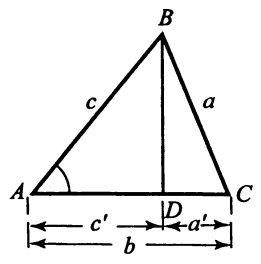


Рис. 203

или, обозначая длины линий малыми буквами, как указано на рисунке, надо доказать равенство:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc'.$$

Из прямоугольного $\triangle BAD$ находим:

$$a^2 = h^2 + (a')^2. \qquad (1)$$

Определим каждый из квадратов h^2 и $(a')^2$. Из прямоугольного $\triangle BAD$ находим:

$$h^2 = c^2 - (c')^2. \qquad (2)$$

С другой стороны, $a' = b - c'$ (рис. 203) или $a' = c' - b$ (рис. 204). В обоих случаях для $(a')^2$ получаем одно и то же выражение:

$$\begin{aligned} &(a')^2 = (b - c')^2 = b^2 - 2ac' + (c')^2; \\ &(a')^2 = (c' - b)^2 = (c' - b)^2 = (c')^2 - 2bc' - 2bc' + b^2. \end{aligned} \qquad (3)$$

Теперь равенство (1) можно переписать так:

$$a^2 = c^2 - (c')^2 + b^2 - 2bc' + (c')^2 = c^2 + b^2 - 2bc'.$$

195. Теорема. ***В тупоугольном треугольнике квадрат стороны, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением какой-нибудь из этих сторон на отрезок ее продолжения от вершины тупого угла до высоты.***

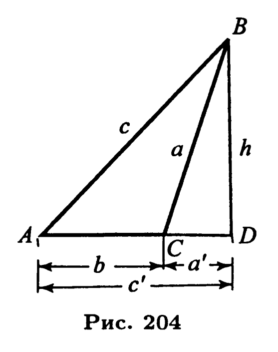


Рис. 204

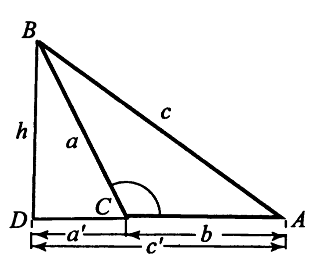


Рис. 205

Пусть AB — сторона $\triangle ADC$ (рис. 205), лежащая против тупого угла C, и BD — высота, опущенная на продолжение какой-либо из остальных сторон, например на AC; требуется доказать, что

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot CD,$$

или, применяя сокращенные обозначения, согласно указанию на рисунке:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ba'.$$

Из треугольников ABD и CBD находим:

$$c^2 = h^2 + (c')^2 = a^2 - (a')^2 + (a' + b')^2 =$$
$$= a^2 - (a')^2 + (a')^2 + 2ba' + b^2 = a^2 + b^2 + 2ba',$$

что и требовалось доказать.

196. Следствие. Из трех последних теорем выводим, что *квадрат стороны треугольника равен, меньше или больше суммы квадратов двух других сторон, смотря по тому, будет ли противолежащий угол прямой, острый или тупой.* Отсюда следует обратное предложение: *угол треугольника окажется прямым, острым или тупым, смотря по тому, будет ли квадрат противолежащей этому углу стороны равен, меньше или больше суммы квадратов двух других сторон.*

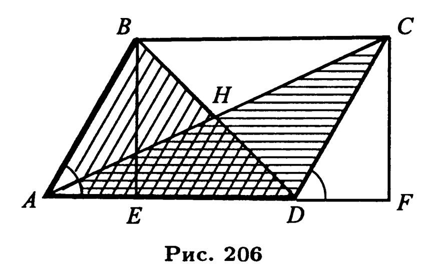


Рис. 206

197. Теорема. ***Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон*** (рис. 206).

Из вершин B и C параллелограмма $ABCD$ опустим на основание AD перпендикуляры BE и CF. Тогда из треугольников ABD и ACD находим:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD \cdot AE;$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot DF.$$

Прямоугольные треугольники ABE и DCF равны, так как они имеют по равной гипотенузе и равному острому углу; поэтому $AE = DF$. Заметив это, сложим почленно два выведенных выше равенства; тогда $2AD \cdot AE$ и $2AD \cdot DF$ взаимно уничтожаются, и мы получим:

$$BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + CD^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

198. Вычисление высот треугольника по его сторонам. Определим высоту h_a треугольника ABC, опущенную на сторону $BC = a$ (рис. 207 и 208). Обозначим отрезки стороны a (продолженной

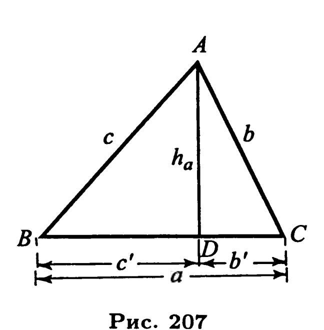


Рис. 207

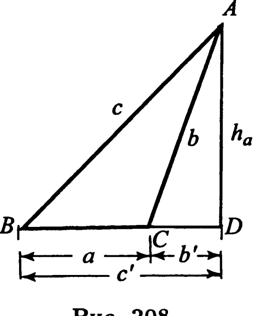


Рис. 208

в случае тупого угла C, рис. 208) таким образом: отрезок BD, прилежащий к стороне c, через c', а отрезок DC, прилежащий к стороне b, через b'. Пользуясь теоремой о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла (§ 194), можем написать:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'.$$

Из этого уравнения находим отрезок c':

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

после чего из треугольника ABD определяем высоту как катет:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2}.$$

Таким же путем можно определить в зависимости от сторон треугольника длины h_b, и h_c высот, опущенных на стороны b и c.

7. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ

199. Некоторые пропорциональные линии в круге мы указали ранее (§ 189); теперь укажем еще другие.

Теорема. ***Если через точку*** (M, рис. 209), ***взятую внутри круга, проведены какая-нибудь хорда*** (AB) ***и диаметр*** (CD), ***то произведение отрезков хорды*** ($AM \cdot MB$) ***равно произведению отрезков диаметра*** ($MD \cdot MC$).

Проведя две вспомогательные хорды AC и BD, мы получим два треугольника AMC и MBD (покрытые на рисунке штрихами), которые подобны, так как у них углы A и D равны как вписанные,

опирающиеся на одну и ту же дугу BC, и углы C и D равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу AD. Из подобия треугольников выводим:

$$AM : MD = MC : MB,$$

откуда

$$AM \cdot MB = MD \cdot MC.$$

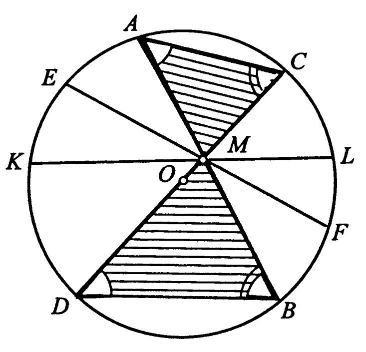


Рис. 209

200. С л е д с т в и е. *Если через точку* (M, рис. 209), *взятую внутри круга, проведено сколько угодно хорд* (AB, EF, $KL, \ldots$), *то произведение отрезков каждой хорды есть число постоянное для всех хорд*, так как для каждой хорды это произведение равно произведению отрезков диаметра CD, проходящего через взятую точку M.

201. Т е о р е м а. ***Если из точки*** (M, рис. 210), ***взятой вне круга, проведены к нему какая-нибудь секущая*** (MA) ***и касательная*** (MC), ***то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной*** (предполагается, что секущая ограничена второй точкой пересечения, а касательная — точкой касания).

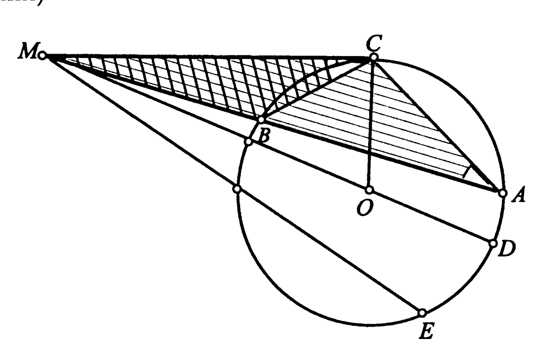


Рис. 210

Проведем вспомогательные хорды AC и BC; тогда получим два треугольника MAC и MBC (покрытые на чертеже штрихами), которые подобны, потому что у них угол M общий и углы MCB и CAB равны, так как каждый из них измеряется половиной дуги BC. Возьмем в ΔMAC стороны MA и MC; сходственными сторонами в ΔMBC будут MC и MB; поэтому

$$MA : MC = MC : MB,$$

откуда

$$MA \cdot MB = MC^2.$$

202. Следствие. *Если из точки* (M, рис. 210), *взятой вне круга, проведены к нему сколько угодно секущих* (MA, MD, $ME, \ldots$), *то произведение каждой секущей на ее внешнюю часть есть число постоянное для всех секущих, так как для каждой секущей это произведение равно квадрату касательной* (MC^2), *проведенной из точки* M.

8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

203. Определение. Пусть α будет какой-нибудь острый угол (рис. 211). Возьмем на одной из его сторон произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MN на другую сторону угла. Тогда мы получим прямоугольный треугольник BMN. Возьмем отношения сторон этого треугольника попарно, а именно:

$\frac{MN}{BM}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе;

$\frac{BN}{BM}$, т. е. отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе;

$\frac{MN}{BN}$, т. е. отношение катета, противолежащего углу α, к катету прилежащему, и им обратные отношения:

$$\frac{BM}{MN}, \quad \frac{BM}{BN}, \quad \frac{BN}{MN}.$$

Величина каждого из этих шести отношений не зависит от положения точки M на стороне BC. Действительно, если мы вместо точки M возьмем другие точки $M', M'', \ldots$ и опустим перпендикуляры $M'N', M''N'', \ldots$, то образовавшиеся треугольники $BM'N', BM''N'', \ldots$ будут подобны треугольнику BMN, так как соответственные углы их одинаковы. Так как в подобных треугольниках сходственные стороны пропорциональны, то

$$\frac{MN}{BN} = \frac{M'N'}{BN'} = \frac{M''N''}{BN''} = \ldots,$$

$$\frac{BN}{MN} = \frac{BN'}{M'N'} = \frac{BN''}{M''N''} = \ldots \quad \text{и т. д.}$$

Величина каждого из взятых нами отношений не зависит также и от того, на какой стороне угла берется точка M. Если, например, мы возьмем точку M_1 (тот же рисунок) на стороне BA и проведем M_1N_1BC, то треугольник BM_1N_1 также будет подобен ΔBMN, так как у них имеются по два равных угла, именно по прямому углу и по острому α, который входит и в тот, и в другой треугольник; поэтому

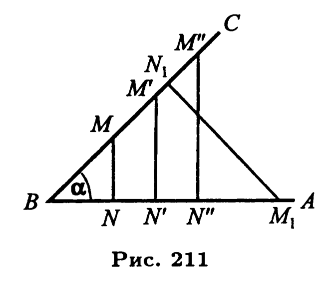


Рис. 211

$$\frac{M_1N_1}{BM_1} = \frac{MN}{BM} = \ldots \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, взятые нами отношения не меняются при изменении положения точки M на этой или другой стороне угла α, но конечно, они изменяются при изменении величины самого угла.

При этом каждому размеру угла соответствует вполне определенное значение каждого из этих отношений.

Поэтому мы можем сказать, что каждое отношение есть **функция** только угла и характеризует собой величину этого угла.

Все указанные отношения принято называть **тригонометрическими функциями угла**. Чаще других из 6 отношений берутся следующие 4, которым дали особые названия и особые обозначения:

отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе называется **синусом** угла α и обозначается $\sin\alpha$;

отношение катета, прилежащего углу α, к гипотенузе называется **косинусом** угла α и обозначается $\cos\alpha$;

отношение катета, противолежашего углу α к катету, прилежащему к нему, называется **тангенсом** угла α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$;

отношение прилежащего катета к противолежащему (т.е. отношение, обратное тому, которое называется тангенсом) называется **котангенсом** угла α и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$.

Так как каждый из двух катетов меньше гипотенузы, то синус и косинус всякого угла есть число, меньшее единицы, и так как один катет может быть и больше, и меньше другого катета, и равен ему, то тангенс и котангенс могут выражаться числами и бо́льшими 1, и меньшими 1, и равными 1.

204. Построение угла по заданной величине одной из его тригонометрических функций. 1) Пусть требуется начертить угол, синус которого равняется $3/4$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого отношение одного из катетов к гипотенузе равнялось бы $3/4$, и взять в этом треугольнике тот

из острых углов, который противолежит этому катету. Чтобы построить такой треугольник, возьмем какой-нибудь небольшой отрезок и отложим отрезок AB (рис. 212), равный четырем таким отрезкам. На AB опишем полуокружности и радиусом, равным $3/4$ гипотенузы с центром в точке B, опишем дугу до пересечения ее в точке C с по-

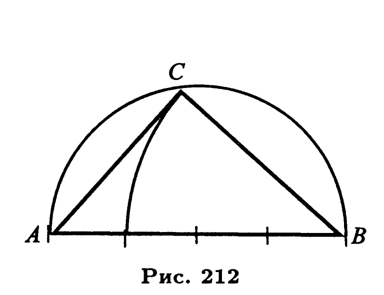


Рис. 212

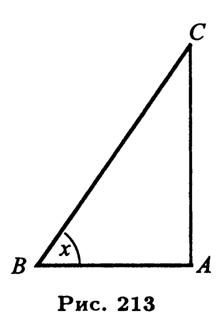


Рис. 213

луокружностью. Соединив C с A и с B, мы получим прямоугольный треугольник, угол которого A и будет иметь синус $3/4$.

2) Дано уравнение: $\cos x = 0,7$; построить угол x. Эта задача решается так же, как и 1-я: за гипотенузу возьмем отрезок AB (тот же рисунок), равный 10 каким-нибудь одинаковым частям, а за прилежащий катет AC отрезок в 7 таких же частей; тогда угол A, прилежащий к этому катету, и будет искомый.

3) Построить угол x, зная, что $\operatorname{tg} x = l1/2$. Для этого надо построить такой прямоугольный треугольник, у которого один катет был бы в $1 1/2$ раза более другого катета. Построив прямой угол (рис. 213), отложим на одной стороне его произвольной длины отрезок AB, а на другой стороне отрезок AC, равный $1 1/2 AB$. Соединив точки B и C, получим угол B, тангенс которого равен $1 1/2$.

Такое же построение придется выполнить, когда угол требуется построить по данному котангенсу, только тогда за искомый угол надо взять тот, который прилежит к катету AC.

205. Изменение тригонометрических функций при изменении угла от 0 до 90°. Чтобы удобнее проследить изменение синуса и косинуса при изменении величины угла, мы предположим, что при этом изменении длина гипотенузы остается постоянной, равной единице длины, а изменяются только катеты. Опишем радиусом AO (рис. 214), равным произвольной единице длины, четверть окружности AM и в ней возьмем какой-нибудь центральный угол $AOB = \alpha$.

Опустив из B на радиус OA перпендикуляр BC, мы будем иметь:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{BC}{1} = \text{числ. велич. } BC;$$

$$\cos\alpha = \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{1} = \text{числ. велич. } OC.$$

Вообразим теперь, что радиус OB вращается вокруг центра O в сторону, указанную на рисунке стрелкой, начиная от OA и кончая OM. Тогда угол α будет увеличиваться от 0 до 90° (переходя через ука-

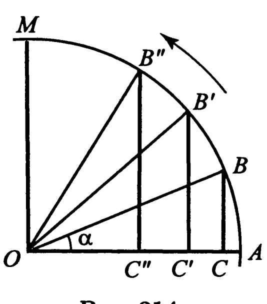


Рис. 214

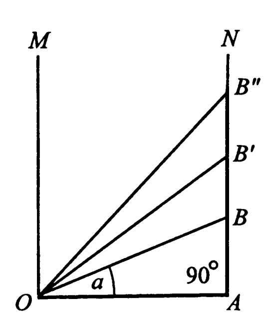


Рис. 215

занные на рисунке значения AOB, AOB', AOB'' и т. д.); численная величина катета OC, противолежащего углу α, будет увеличиваться от 0 (при $\alpha = 0°$) до 1 (при $\alpha = 90°$); численная величина катета OC, прилежащего к углу α, будет, наоборот, уменьшаться от 1 (при $\alpha = 0°$) до 0 (при $\alpha = 90°$). Таким образом, **при возрастании угла от 0 до 90° синус его увеличивается от 0 до 1, а косинус уменьшается от 1 до 0.**

Проследим теперь изменение тангенса. Так как тангенс есть отношение катета, противолежащего углу, к катету прилежащему, то удобнее будет предположить, что при изменении острого угла прилежащий катет остается неизменным, равным единице длины, а другой катет изменяется. Возьмем отрезок OA, равный единице длины (рис. 215), и примем его за неизменный катет треугольника AOB, острый угол которого $AOB = \alpha$ станем изменять.

Согласно определению, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{AB}{1} = \text{числ. велич. } AB.$

Будем теперь перемещать точку B вдоль AN, начиная от A, все выше и выше через положения B', B'', ... и т. д.; тогда, как видно из рисунка, угол α и его тангенс будут возрастать, причем когда подвижная точка B совпадает с A, угол α равен 0° и тангенс его будет

также 0. Когда точка B поднимается по прямой AN все выше и выше, угол α возрастает, стремясь к углу $AOM = 90°$, и численная величина тангенса тоже возрастает, причем она, очевидно, может сделаться больше какого угодно большого числа (возрастает неограниченно). Значит, **при возрастании угла от 0 до 90° тангенс его увеличивается от 0 неограниченно.**

Заметим, что вместо того, чтобы говорить о какой-нибудь изменяющейся величине, что она возрастает неограниченно, говорят иначе, что она возрастает до бесконечности, причем слово «бесконечность» выражают письменно знаком ∞; так что изменение тангенса можно выразить так: при возрастании угла от 0 до 90° тангенс его возрастает от 0 до ∞.

Из определения котангенса (§ 203) следует, что котангенс есть величина, обратная тангенсу ($\operatorname{ctg}\alpha = 1 : \operatorname{tg}\alpha$), а потому, когда $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от 0 до ∞, то $\operatorname{ctg}\alpha$ убывает от ∞ до 0.

206. Таблица тригонометрических функций. В конце этой книги приложена таблица, в которой вписаны тригонометрические функции (с точностью до 5-го десятичного знака) для всех углов, выражаемых целым числом градусов, от 1 до 90° . Таблица эта расположена так: в первой слева колонне (над которой напечатано «градусы») помещены числа градусов: 1° , 2° , 3° , ... до 45°; во второй колонне (над которой напечатано «синусы») выставлены величины синусов, соответствующие углам, указанным в первой колонне; в 3-й колонне помещены величины косинусов, затем тангенсов и далее котангенсов, в последней, 6-й колонне помещены снова числа градусов, именно: 90° , 89° , 88° , 87° и т. д. до 45°. Сделано это (ради экономии места) на том основании, что, как следует из определения синуса и косинуса § 203, $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha), \cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ и т. д.; значит, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ и т. д. Поэтому внизу той колонны, над которой сверху стоит надпись «синусы» напечатано «косинусы»; внизу той колонны (3-й слева), над которой помечено «косинусы», стоит «синусы» и т. п. Таким образом, для углов от 1 до 45° надо читать числа градусов в первой колонне слева, а названия тригонометрических функций — над колоннами, для углов же от 45 до 89° надо числа градусов брать в последней колонне справа, а названия функций читать внизу колонны. Например, из таблицы находим: $\operatorname{tg} 35° = 0{,}70021$, $\cos 53° = 0{,}60182$, $\operatorname{tg} 72° = 3{,}07768$ и т. п.

При помощи такой таблицы мы можем не только находить тригонометрические функции данного угла, но и, наоборот, по данной функции неизвестного угла можем находить (приближенно) этот угол. Пусть, например, требуется найти угол x, зная, что $\sin x = 0{,}61523$. Ищем в колоннах синусов число, возможно близкое к 0,61523. Это

число — 0,61566, означающее $\sin 38°$. Так как 0,61523<0,61566, то $x < 38°$. Но, с другой стороны, 0,61523>0,60182 (последнее число в таблице стоит над числом 0,61566 и означает $\sin 37°$); поэтому $x > 37°$. Мы нашли, таким образом, два угла: 37° и 38°, между которыми заключается угол x. Значит, если мы вместо x примем угол в 37° или угол в 38°, то в первом случае найдем приближенное значение с недостатком, а во втором случае с избытком, в том и другом случае с точностью до 1°. Предпочтительно брать тот из этих двух углов, синус которого менее разнится от данного (в нашем примере лучше взять 38°).

Пусть еще требуется найти угол X по уравнению: $\operatorname{ctg} x = 0{,}7826$. В колоннах котангенсов находим: $0{,}78129 = \operatorname{ctg} 52°$; $0{,}80978 = \operatorname{ctg} 51°$.

Так как 0,80978>0,7826>0,78129, то $51° < x < 52°$, причем x ближе к 52°, и потому лучше принять $x = 52°$ (с точностью до 1°).

207. Зависимость между сторонами и углами прямоугольного треугольника.

1) Из прямоугольного треугольника ABC находим (рис. 216):

$$\frac{b}{a} = \sin B, \quad \frac{c}{a} = \cos B,$$

откуда

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

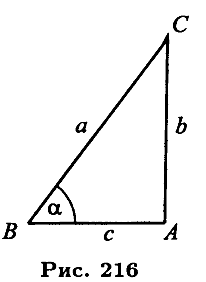


Рис. 216

Так как $B = 90° - C$, то $\sin B = \cos C$ и $\cos B = \sin C$; значит, предыдущие равенства можно дополнить так:

$$b = a \sin B = a \cos C;$$
$$c = a \cos B = a \sin C.$$

Таким образом, **катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего этому катету, или на косинус угла, прилежащего к нему**.

2) Из того же треугольника находим:

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg} B; \quad \frac{c}{b} = \operatorname{ctg} B,$$

откуда

$$b = c \operatorname{tg} B; c = b \operatorname{ctg} B.$$

Но $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg}(90° - B) = \operatorname{ctg} C$ и $\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg}(90° - B) = \operatorname{tg} C$. Поэтому можно написать:

$$b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{ctg} C; \quad c = b \operatorname{ctg} B = b \operatorname{tg} C,$$

т. е. **катет равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к нему.**

208. Решение прямоугольных треугольников. Указанные зависимости позволяют нам решать прямоугольный треугольник, т. е. по некоторым данным элементам его вычислять остальные. Приведем пример.

Пример. В прямоугольном треугольнике известны: гипотенуза $a = 4{,}5$ и угол $C = 42°$. Найти катеты и угол B.

$$b = a\cos C = 4{,}5 \cdot \cos 42°; \quad c = a\sin C = 4{,}5 \cdot \sin 42°.$$

Из таблицы находим (ограничиваясь 4 десятичными знаками):

$$\sin 42° = 0{,}6691, \quad \cos 42° = 0{,}7431.$$

Значит:

$$b = 4{,}5{\cdot}0{,}7431 = 3{,}34395; \quad c = 4{,}5{\cdot}0{,}6691 = 3{,}01095; \quad B = 90°-C = 48°.$$

9. ПОНЯТИЕ О ПРИЛОЖЕНИИ АЛГЕБРЫ К ГЕОМЕТРИИ

209. Задача. *Данный отрезок разделить в среднем и крайнем отношении.*

Эту задачу надо понимать так: разделить данный отрезок на такие две части, чтобы большая из них была средней пропорциональной между всей линией и меньшей ее частью.

Задача будет решена, если мы найдем одну из двух частей, на которые требуется разделить данный отрезок. Будем находить большую часть, т. е. ту, которая должна быть средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей его частью. Предположим сначала, что речь идет не о построении этой части, а только о вычислении ее длины. Тогда задача решается алгебраически так: если длину данного отрезка обозначим a, а длину большей части x, то длина другой части будет равна $a - x$ и, согласно требованию задачи, мы будем иметь пропорцию:

$$a : x = x : (a - x),$$

откуда

$$x^2 = a(a - x), \quad \text{или} \quad x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, находим:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}; \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}.$$

Отбросив второе решение, как отрицательное, возьмем только первое положительное решение, которое удобнее представить так:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} - \frac{a}{2} =$$
$$= \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2} = a \cdot 0{,}61803\ldots.$$

Таким образом, задача всегда возможна и имеет только одно решение.

Если бы нам удалось построить такой отрезок, длина которого численно выражается найденной выше формулой, то нанеся этот отрезок на данный отрезок, мы разделили бы его в среднем и крайнем отношении. Итак, вопрос сводится к построению найденной формулы. Построить эту формулу всего удобнее, если мы ее возьмем в том виде, в каком она была до упрощения, т. е. возьмем:

$$x_1 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}.$$

Рассматривая отдельно выражение $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$, мы замечаем, что оно представляет собой длину гипотенузы такого прямоугольного треугольника, у которого один катет равен a, а другой $\frac{a}{2}$. Построив такой треугольник, мы найдем отрезок, выражаемый формулой $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Чтобы получить затем отрезок x_1, достаточно из гипотенузы построенного треугольника вычесть $\frac{a}{2}$. Таким образом, построение можно выполнить так:

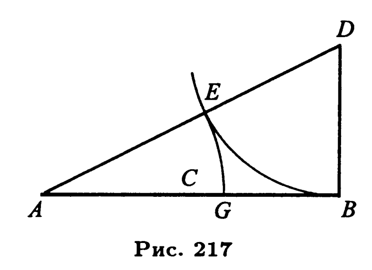


Рис. 217

Делим (рис. 217) данный отрезок $AB = a$ пополам в точке C. Из конца B восставляем перпендикуляр и откладываем на нем $BD = BC$. Соединив A с D прямой, получим прямоугольный $\triangle ABD$, у которого один катет $AB = a$, а другой катет $BD = \frac{a}{2}$.

Следовательно, его гипотенуза AD равна $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. Чтобы вычесть из гипотенузы длину $\frac{a}{2}$, опишем дугу радиусом $BD = \frac{a}{2}$ с центром в точке D. Тогда отрезок AE будет равен $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2}$, т. е. будет равен x_1. Отложив AE на AB (от A до G), получим точку G, в которой отрезок AB делится в среднем и крайнем отношении*).

Замечание. Деление отрезка в среднем и крайнем отношении нужно в геометрии для построения правильного 10-угольника, вписанного в данный круг.

210. Алгебраический способ решения геометрических задач. Мы решили предложенную задачу путем приложения алгебры к геометрии. Этот прием состоит в следующем: сперва определяют, какой отрезок прямой должно отыскать, чтобы можно было решить задачу. Затем, обозначив длины данных отрезков прямой буквами $a, b, c, \ldots$, а искомого буквой x, составляют из условий задачи и известных теорем уравнение, связывающее длину искомого отрезка прямой с длинами данных, и полученное уравнение решают по правилам алгебры. Найденную формулу исследуют, т. е. определяют, при всяких ли заданиях эта формула дает возможные решения или только при некоторых и получается ли одно решение или несколько. Затем строят формулу, т. е. находят построением такой отрезок прямой, численная величина которого выражается этой формулой.

Таким образом, алгебраический прием решения геометрических задач состоит в общем из следующих четырех частей: 1) составление уравнения; 2) решение его; 3) исследование полученной формулы и 4) построение ее.

Иногда задача приводится к отысканию нескольких отрезков прямой. Тогда, обозначив численные величины их буквами $x, y, \ldots$, стремятся составить столько уравнений, сколько неизвестных.

211. Построение простейших формул. Укажем простейшие формулы, которые можно построить посредством циркуля и линейки; при этом будем предполагать, что буквы a, b, $c, \ldots$ означают длины данных отрезков прямой, а x — длину искомого. Не останавливаясь на таких формулах:

$$x = a + b + c, \quad x = a - b, \quad x = 2a, 3a, \ldots,$$

построение которых выполняется весьма просто, перейдем к более сложным:

---

*) Деление отрезка в среднем и крайнем отношении известно под названием **золотого сечения**.

1) Формулы $x = \frac{a}{2}, \frac{a}{3}, \ldots$ и т.д. строятся посредством деления отрезка a на равные части, затем, если нужно, повторением одной части слагаемых 2, 3, ... и так далее раз.

2) Формула $x = \frac{ab}{c}$ выражает четвертую пропорциональную к отрезкам прямой c, a и b. Действительно, из этого равенства выводим:

$$cx = ab,$$

откуда

$$c : a = b : x.$$

Следовательно, x найдется способом, указанным нами для построения четвертой пропорциональной (§ 185).

3) Формула $x = \frac{a^2}{b}$ выражает четвертую пропорциональную к отрезкам прямой b, a и a, или, как говорят, третью пропорциональную к отрезкам b и a. Действительно, из данного равенства выводим:

$$bx = a^2,$$

откуда

$$b : a = a : x.$$

Следовательно, x найдется тем же способом, каким отыскивается четвертая пропорциональная (только отрезок a придется откладывать два раза).

4) Формула $x = \sqrt{ab}$ выражает среднюю пропорциональную между a и b. Действительно, из нее выводим:

$$x^2 = ab,$$

откуда

$$a : x = x : b.$$

Следовательно, x найдется способом, указанным раньше для построения средней пропорциональной (§ 190).

5) Формула $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ выражает гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b.

6) Формула $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ представляет катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть a, а другой катет b.

Построение всего удобнее выполнить так, как указано в § 126.

Указанные формулы можно считать основными. При помощи их строятся более сложные формулы. Например:

7) $x = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Подведя a под знак радикала, получим:

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \sqrt{a \cdot \frac{2}{3}a}.$$

Отсюда видно, что x есть средняя пропорциональная между отрезками a и $\frac{2}{3}a$.

8) $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 + d^2}$. Положим, что $a^2 + b^2 = k^2$. Тогда k найдется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть a и b. Построив k, положим, что $k^2 + d^2 = l^2$. Тогда l найдется как гипотенуза прямоугольного треугольника, у которого катеты суть k и d. Построив l, будем иметь $x = \sqrt{l^2 - c^2}$. Следовательно, x есть катет такого треугольника, у которого гипотенуза l, а другой катет c.

Ограничимся этими примерами. Заметим, что подробное рассмотрение способов построения алгебраических формул приводит к следующему важному выводу:

При помощи линейки и циркуля возможно строить только такие алгебраические выражения, которые могут быть получены из известных величин с помощью конечного числа рациональных операций и извлечения квадратных корней.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. Прямая, проведенная через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения непараллельных сторон и через точку пересечения диагоналей.

2. Если в треугольнике из вершины угла, лежащего между неравными сторонами, проведены биссектриса и медиана, то первая меньше второй.

3. Если два круга касаются извне, то часть внешней общей касательной, ограниченная точками касания, есть средняя пропорциональная между диаметрами кругов.

4. Если на сторонах угла отложим от вершины пропорциональные отрезки, то прямые, соединяющие соответственные концы их, параллельны.

5. Если в прямоугольный $\triangle ABC$ вписать квадрат $DEFG$ так, чтобы сторона DE лежала на гипотенузе BC, то эта сторона есть средняя пропор-

циональная между отрезками гипотенузы BD и EC (точки на гипотенузе следуют в порядке B, D, E, C).

6. Если два отрезка AB и CD пересекаются (хотя бы и при продолжении) в точке E так, что $BE \cdot EA = EC \cdot ED$, то точки A, B, C и D лежат на одной окружности (теорема, обратная изложенным в §§ 200, 202).

7. Дана окружность O и две точки A и B. Через эти точки проведено несколько окружностей, пересекающих окружность O или касающихся ее. Доказать, что все хорды, соединяющие точки пересечения каждой из этих трех окружностей с окружностью O, а также и общие касательные сходятся (при продолжении) в одной точке, лежащей на продолжении AB.

8. Основываясь на свойстве, изложенном в предыдущей задаче, вывести способ построения такой окружности, которая проходит через две данные точки A и B и касается данной окружности O.

9. Даны два каких-нибудь круга на плоскости. Если два радиуса этих кругов движутся, оставаясь постоянно параллельными, то прямая, проходящая через концы их, пересекает линию центров всегда в одной и той же точке (в центре подобия двух кругов).

10. Медиана треугольника делит пополам все прямые, проведенные внутри треугольника параллельно той стороне, относительно которой взята медиана.

11. Даны три прямые, исходящие из одной точки. Если по одной из них движется какая-нибудь точка, то расстояния ее от двух других прямых сохраняют всегда одно и то же отношение.

12. Если две окружности концентрические, то сумма квадратов расстояний всякой точки одной из них от концов какого угодно диаметра другой есть величина постоянная (§ 197).

13. Если соединим прямыми основания трех высот какого-нибудь треугольника, то образовавшиеся при этом три треугольника у вершин данного подобны ему. Вывести отсюда, что для треугольника, имеющего сторонами прямые, соединяющие основания высот данного треугольника, эти высоты служат биссектрисами.

14. Диаметр AB данной окружности продолжен за точку B. Через какую-нибудь точку C этого продолжения проведена прямая $CD \perp AB$. Если произвольную точку M этого перпендикуляра соединим с A, (обозначив через A_1 вторую точку пересечения с окружностью этой прямой), то произведение $AM \cdot AA_1$ есть величина постоянная для всякой точки M.

Найти геометрические места

15. Середин всех хорд, проходящих через данную точку окружности.

16. Точек, делящих в одном и том же отношении $m : n$ все хорды, проходящие через данную точку окружности.

17. Точек, расстояние которых от сторон данного угла имеет одно и то же отношение $m : n$.

18. Точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная (§ 197).

19. Точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек есть величина постоянная.

20. Точек, делящих в данном отношении $m : n$ все прямые, соединяющие точки окружности с данной точкой O (лежащей вне или внутри круга).

Задачи на построение

21. Через точку, данную внутри или вне угла, провести прямую так, чтобы отрезки ее, заключенные между этой точкой и сторонами угла, имели данное отношение $m : n$.

22. Найти в треугольнике такую точку, чтобы перпендикуляры, опущенные из нее на стороны треугольника, находились в данном отношении $m : n : p$ (см. упражнение 17).

23. Построить треугольник по углу, одной из сторон, прилежащих к нему, по отношению этой стороны к третьей стороне (сколько решений?).

24. То же — по углу при вершине, основанию и отношению его к одной из боковых сторон.

25. То же — по высоте, углу при вершине и отношению отрезков основания.

26. То же — по углу при вершине, основанию и данной на основании точке, через которую проходит биссектриса угла при вершине.

27. То же — по двум углам и сумме или разности основания с высотой.

28. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и сумме основания с высотой.

29. На бесконечной прямой MN даны две точки A и B. Найти на этой прямой третью точку C, чтобы $CA : CB = m : n$, где m и n — данные отрезки прямой или данные числа (если $m \neq n$, то таких точек существует две: одна между A и B, другая вне отрезка AB).

30. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны: основание и отношение двух сторон.

31. Вписать в данный круг треугольник, у которого даны: основание и медиана относительно одной из неизвестных сторон.

32. Вписать квадрат в данный сегмент так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а вершины противолежащих углов — на дуге.

Указание. Задачи решаются методом подобия (§ 181).

33. Вписать квадрат в данный треугольник так, чтобы одна сторона его лежала на основании треугольника, а вершины противолежащих углов — на боковых сторонах треугольника.

34. В данный треугольник вписать прямоугольник (см. предыдущую задачу), у которого стороны относились бы как $m : n$.

35. Около данного квадрата описать треугольник, подобный данному треугольнику.

36. Дана окружность и на ней две точки A и B. Найти на этой окружности третью точку C, чтобы расстояния ее от A и B находились в данном отношении.

37. Построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними (см. рис. 196; сначала находим прямую CE из пропорции $CE : BD = AE : AB$, затем строим $\triangle BCE$ и т. д.).

38. Построить отрезок x, который относился бы к данному отрезку m как $a^2 : b^2$ (a и b — данные отрезки прямой).

39. Найти вне данного круга такую точку, чтобы касательная, проведенная из нее к этой окружности, была вдвое менее секущей, проведенной из той же точки через центр (приложением алгебры к геометрии).

40. Через данную вне круга точку провести такую секущую, которая разделилась бы этой окружностью в данном отношении (приложением алгебры к геометрии).

41. Построить треугольник по трем его высотам h_1, h_2, h_3.

Р е ш е н и е. Предварительно из подобия прямоугольных треугольников надо доказать, что высоты о б р а т н о п р о п о р ц и о н а л ь н ы соответствующим сторонам. Если стороны, на которые опущены высоты h_1, h_2, h_3 обозначим соответственно через x_1, x_2, x_3, то

$$x_1 : x_2 = h_2 : h_1,$$

$$x_2 : x_3 = h_3 : h_2 = 1 : \frac{h_2}{h_3} = h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3},$$

откуда

$$x_1 : x_2 : x_3 = h_2 : h_1 : \frac{h_1 h_2}{h_3}.$$

Выражение $\frac{h_1 h_2}{h_3}$ есть четвертая пропорциональная к h_3, h_2 и h_1. Построив ее (пусть это будет k), мы будем иметь три отрезка прямой: h_2, h_1 и k, которым искомые стороны пропорциональны; значит, треугольник, имеющий эти отрезки сторонами, подобен искомому, и потому вопрос приводится к построению такого треугольника, который, будучи подобен данному, имел бы данную высоту. Задача окажется невозможной, если по трем прямым h_1, h_2 и k нельзя построить треугольник.

42. Построить отрезки, выражаемые формулами:

$$1)\ x = \frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e}$$

(придется два раза построить четвертую пропорциональную);

$$2)\ x = \sqrt{a^2 + bc}$$

(предварительно построить отрезок $k = \sqrt{bc}$, потом $x = \sqrt{a^2 + k^2}$).

З а д а ч и н а в ы ч и с л е н и е

43. По данному основанию a и высоте h остроугольного треугольника вычислить сторону x квадрата, вписанного в этот треугольник так, что одна сторона квадрата лежит на основании треугольника, а две вершины квадрата — на боковых сторонах треугольника.

44. Стороны треугольника суть 10, 12 и 17 м. Вычислить отрезки стороны, равной 17 м, на которые она делится биссектрисой противолежащего угла.

45. Перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, делит ее на два отрезка m и n. Вычислить катеты.

46. По трем сторонам a, b и c треугольника ABC вычислить медиану AD, проведенную к стороне BC.

Указание. Продолжив AD на расстояние $DE = AD$ и соединив точку E с B и C, получим параллелограмм, к которому применим теорему § 197.

47. В $\triangle ABC$ стороны равны: $AB = 7$, $BC = 15$ и $AC = 10$. Определить, какого вида угол A, и вычислить высоту, опущенную из вершины B.

48. Из точки вне круга проведена касательная a и секущая. Вычислить длину секущей, зная, что отношение внешней ее части к внутренней равно $m : n$.

49. К двум кругам, радиусы которых суть R и r, а расстояние между центрами d, проведена общая касательная. Определить вычислением положение точки пересечения этой касательной с линией центров, во-первых, когда эта точка лежит по одну сторону от центров, во-вторых, когда она расположена между ними.

Глава IV

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ

1. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

212. Определения. Ломаная линия называется правильной, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) отрезки прямых, составляющие ее, равны; 2) углы, составленные каждыми двумя соседними отрезками, равны; 3) из каждых трех последовательных отрезков первый и третий расположены по одну сторону от прямой, на которой лежит второй.

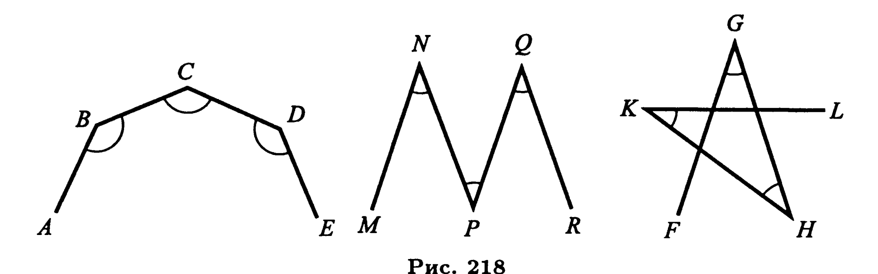


Рис. 218

Таковы, например, линии $ABCDE$ и $FGHKL$ (рис. 218); но ломаную $MNPQR$ нельзя назвать правильной, потому что она не удовлетворяет третьему условию.

Правильная ломаная может быть **выпуклой**, как например линия $ABCDE$.

Многоугольник называется **правильным**, если он ограничен правильной ломаной линией, т. е. если он имеет равные стороны и равные углы. Таковы, например, квадрат, равносторонний треугольник и др.

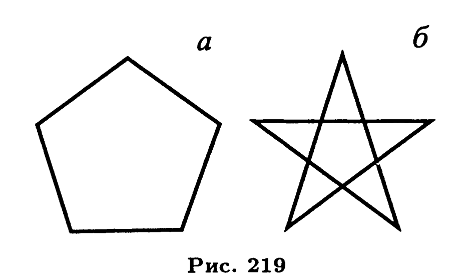


Рис. 219

Многоугольник, изображенный на рис. 219, *а*, есть **выпуклый** правильный пятиугольник; многоугольник на рис. 219,*б* — также правильный пятиугольник, но не выпуклый (так называемый **звездчатый**). В нашем курсе геометрии мы будем рассматривать т о л ь к о в ы п у к л ы е правильные многоугольники и поэтому, когда мы скажем «правильный многоугольник», мы будем подразумевать слово «выпуклый».

Последующие теоремы показывают, что построение правильных многоугольников тесно связано с разделением окружности на равные части.

213. Т е о р е м а. ***Если окружность разделена на некоторое число равных частей** (**больше двух**), **то**:*

1) ***соединив хордами каждые две соседние точки деления, получим правильный многоугольник** (**вписанный**);*

2) ***проведя через все точки деления касательные и продолжив каждую из них до взаимного пересечения с касательными соседних точек деления, получим правильный многоугольник** (**описанный**).* Пусть окружность (рис. 220) разделена на

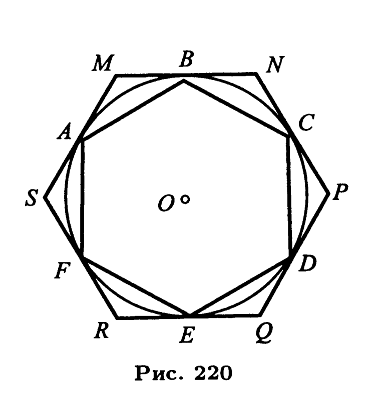


Рис. 220

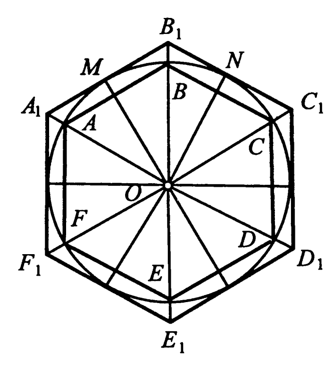


Рис. 221

несколько равных частей в точках A, B, C и т. д. и через эти точки проведены хорды AB, BC, ... и касательные MBN, NCP и т. д. Тогда

1) вписанный многоугольник $ABCDEF$ — правильный, потому что все его стороны равны (как хорды, стягивающие равные дуги) и все углы равны (как вписанные, опирающиеся на равные дуги),

2) чтобы доказать правильность описанного многоугольника $MNPQRS$, рассмотрим треугольники AMB, BNC и т.д. У них основания AB, BC и т.д. равны; углы, прилежащие к этим основаниям, также равны, потому что каждый из них имеет одинаковую меру (угол, составленный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключенной внутри него). Значит, все эти треугольники равнобедренные и равны между собой, а потому $MN = NP$ и т.д. и $\angle M = \angle N = \ldots$ и т.д., т.е. многоугольник $MNPQRS$ правильный.

214. Замечание. Если из центра O (рис. 221) опустим на хорды AB, BC и т.д. перпендикуляры и продолжим их до пересечения с окружностью в точках M, N и т.д., то эти точки разделяют все дуги и хорды пополам и тем самым разделят окружность на равные части. Поэтому, если через точки M, N и т.д. проведем касательные до взаимного пересечения, как указано выше, то получим также правильный описанный многоугольник, стороны которого будут параллельны сторонам вписанного многоугольника. Каждая пара вершин A и A_1, B и B_1 и т.д. лежит на одной прямой с центром, а именно: на биссектрисе угла MON и других таких же углов.

215. Теорема. ***Если многоугольник правильный, то:***

1) ***около него можно описать окружность***;

2) ***в него можно вписать окружность.***

1) Проведем окружность через какие-нибудь три соседние вершины A, B и C (рис. 222) правильного многоугольника $ABCDE$ и докажем, что она пройдет через следующую, четвертую вершину D. Опустим из центра O перпендикуляр OK на хорду BC и соединим O с A и D. Повернем четырехугольник $ABKO$ вокруг стороны OK так, чтобы он упал на четырехугольник $ODCK$. Тогда KB пойдет по KC (вследствие равенства прямых углов при точке K), B упадет в C (так как хорда BC делится в точке K пополам), сторона BA пойдет по CD (вследствие равенства углов B и C) и, наконец, точка A упадет в D (вследствие равенства сторон BA и CD). Из этого следует, что OA совместится с OD, и, значит, точки A и D одинаково удалены от центра; поэтому вершина D должна лежать на окружности, проходящей через A, B и C. Точно так же докажем, что эта окружность, проходя через три соседние вершины B, C и D,

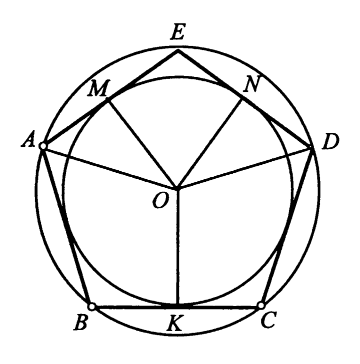


Рис. 222

пройдет через следующую вершину E, и т. д.; значит, она пройдет через все вершины многоугольника.

2) Из доказанного следует, что стороны правильного многоугольника всегда можно рассматривать как равные хорды одной окружности; но такие хорды одинаково удалены от центра; значит, все перпендикуляры OM, ON и т. д., опущенные из O на стороны многоугольника, равны между собой, и потому окружность, описанная радиусом OM с центром в точке O, будет вписанной в многоугольник $ABCDE$.

216. Следствие. Из предыдущего видно, что две окружности, описанная около правильного многоугольника и вписанная в него, имеют один и тот же центр. Так как этот общий центр одинаково удален от всех вершин многоугольника, то он должен лежать на перпендикуляре, восставленном к любой стороне многоугольника из ее середины, а будучи одинаково удален от сторон каждого угла, он должен находиться на его биссектрисе. Поэтому, чтобы найти центр окружности, описанной около правильного многоугольника или вписанной в него, достаточно определить точку пересечения двух перпендикуляров, восставленных к сторонам многоугольника из их середин, или двух биссектрис углов, или одного такого перпендикуляра с биссектрисой.

Легко заметить, что перпендикуляры, восставленные к сторонам правильного многоугольника в серединах этих сторон, а также биссектрисы всех углов правильного многоугольника являются его осями симметрии.

217. Определения. Общий центр окружностей, описанной около правильного многоугольника и вписанной в него, называется центром этого многоугольника, радиус вписанной окружности — **апофемой** его.

Угол, составленный двумя радиусами, проведенными к концам какой-нибудь стороны правильного многоугольника, называется **центральным углом**. Центральных углов в многоугольнике столько, сколько сторон; все они равны, как измеряющиеся равными дугами.

Так как сумма всех центральных углов равна $4d$, или $360°$, то каждый из них равен $4d : n$, или $360° : n$, если n означает число сторон многоугольника; так, центральный угол правильного шестиугольника равен $360° : 6 = 60°$, правильного восьмиугольника равен $360° : 8 = 45°$ и т. п.

Так как сумма всех внутренних углов многоугольника (§ 82), имеющего n сторон, равна $2d(n-2)$, то каждый внутренний угол

правильного многоугольника, имеющего n сторон, равен

$$\frac{2d(n-2)}{n}.$$

Например, у правильного восьмиугольника внутренний угол равен

$$\frac{2d(8-2)}{8} = \frac{12d}{8} = \frac{3}{2}d = 135°.$$

218. Теорема. ***Правильные одноименные многоугольники подобны, а стороны их относятся как радиусы или апофемы.***

1) Чтобы доказать подобие (рис. 223) правильных одноименных многоугольников $ABCDEF$ и $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, достаточно обнаружить, что у них углы равны и стороны пропорциональны.

Углы многоугольников равны, так как каждый из них содержит одно и то же число градусов, а именно: $\frac{180°(n-2)}{n}$, если n означает число сторон каждого многоугольника. Так как $AB = BC = CD = \ldots$ и т. д., то, очевидно, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots$,

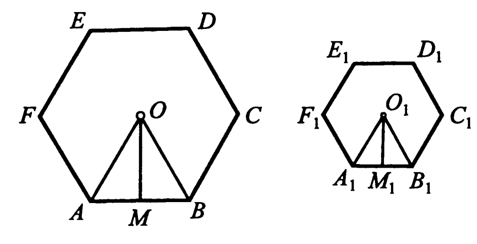


Рис. 223

т. е. у таких многоугольников стороны пропорциональны.

2) Пусть O и O_1 (рис. 223) будут центры данных многоугольников, OA и O_1A_1 — их радиусы, OM и O_1M_1 — апофемы. Треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ подобны, так как углы одного соответственно равны углам другого.

Из подобия их следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1V_1}.$$

Следствие. Так как периметры подобных многоугольников относятся как сходственные стороны (§ 172), то периметры правильных одноименных многоугольников относятся как радиусы или как апофемы.

219. Задача. *Вычислить сторону вписанного в круг:* 1) *квадрата;* 2) *правильного шестиугольника;* 3) *правильного треугольника.*

Условимся обозначать длину стороны правильного многоугольника, имеющего n сторон, буквой a_n, а его периметр — буквой p_n.

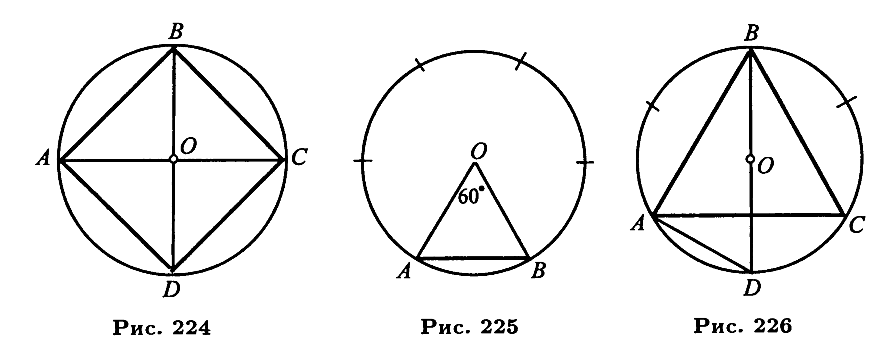


Рис. 224 Рис. 225 Рис. 226

Формулы для сторон вписанного квадрата, шестиугольника и треугольника можно легко получить из рассмотрения рис. 224–226.

1) На рис. 224 проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AC и BD и последовательные концы их соединены хордами; от этого получился вписанный квадрат $ABCD$.

Из прямоугольного $\triangle AOB$ находим:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2R^2,$$

откуда

$$a_4 = R\sqrt{2}.$$

220. 2) На рис. 225 построена хорда, соответствующая центральному углу в 60° (сторона правильного вписанного шестиугольника).

Так как у равнобедренного $\triangle AOB$ каждый из углов A и B равен (180° − 60°): 2 = 60° , то $\triangle AOB$ есть равноугольный и, следовательно, равносторонний; значит:

$$AB = AO, \quad \text{т. е.} \quad a_4 = R.$$

Отсюда мы получаем простой способ деления окружности на шесть равных частей.

221. 3) На рис. 226 окружность разделена на шесть равных частей, и точки деления через одну последовательно соединены хордами, отчего образовался вписанный равносторонний $\triangle ABC$. Проведя хорду AD, получаем прямоугольный треугольник ABD (угол BAD как вписанный, опирающийся на диаметр, есть прямой). Из $\triangle ABD$ находим:

$$AB = \sqrt{BD^2 - AD^2},$$

т. е.

$$a_3 = \sqrt{(2R)^2 - R^2},$$

и, значит,

$$a_3 = R\sqrt{3}.$$

222. Задача. *Вписать в данный круг правильный десятиугольник и определить его сторону в зависимости от радиуса.*

Предварительно докажем одно важное свойство правильного 10-угольника. Пусть хорда AB (рис. 227) есть сторона правильного 10-угольника. Тогда угол AOB равен 36°, а каждый из углов A и B содержит по $^1/_2$(180° −36°), т. е. по 72°. Разделим угол A пополам прямой AC. Каждый из углов, образовавшихся при точке A, равен 36°; следовательно, $\triangle ACO$, имея два равных угла, есть равнобедренный, т. е. $AC = CO$, $\triangle ABC$ также равнобедренный, потому что $\angle B = 72°$ и $\angle ACB = 180° - 72° - 36° = 72°$; следовательно, $AB = AC = CO$. По свойству биссектрисы угла треугольника (§ 186) можно написать:

$$AO : AB = OC : CB. \qquad (1)$$

Заменив AO и AB равными им отрезками OB и OC, получим:

$$OB : OC = OC : CB, \qquad (2)$$

т. е. радиус OB разделен в точке C в среднем и крайнем отношении (§ 209), причем OC есть его бóльшая часть. Но OC равна стороне правильного вписанного 10-угольника; значит, *сторона правильного вписанного 10-угольника равна большей части радиуса, разделенного в среднем и крайнем отношении.*

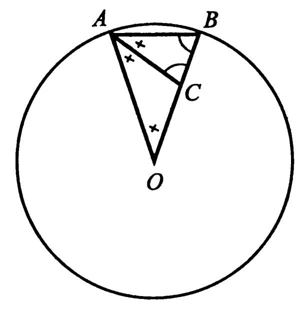


Рис. 227

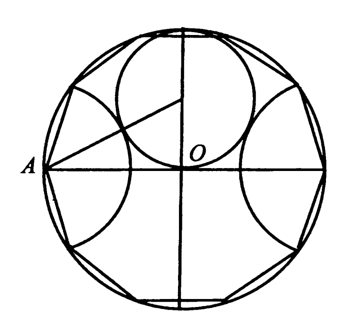


Рис. 228

Теперь задача решается легко:

1) Делят радиус круга (например, OA, рис. 228) в среднем и крайнем отношении; затем, дав циркулю раствор, равный большей части радиуса,

откладывают им по окружности дуги, одна за другой, и точки деления последовательно соединяют хордами.

2) Обозначив длину стороны правильного вписанного 10-угольника буквой x, мы можем пропорцию (2) переписать так:

$$R : x = x : (R - x),$$

откуда

$$x^2 + Rx - R^2 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем:

$$x = a_{10} R\frac{\sqrt{5}-1}{2} = R \cdot 0{,}61803\ldots.$$

223. Замечания. 1) Чтобы вписать в данный круг правильный пятиугольник, делят окружность на 10 равных частей (как указано выше) и точки деления соединяют через одну хордами.

2) Из равенства

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

видно, что если из $1/6$ части окружности вычесть $1/10$ ее часть, то остаток будет равен $1/15$ окружности. Это дает нам простой способ вписать в окружность правильный 15-угольник, так как делить окружность на 6 и на 10 равных частей мы умеем.

3) Чтобы построить пятиконечную звезду (рис. 229), делят окружность на 10 равных частей и какую-нибудь из точек деления соединяют хордами с другими точками деления через три (как указано на рисунке).

224. Задача. *Удвоить число сторон правильного вписанного многоугольника.*

В этом сокращенном выражении разумеются, собственно, две задачи:

1) по данному правильному вписанному многоугольнику построить другой правильный многоугольник, вписанный в ту же окружность, но имеющий вдвое более сторон; 2) вычислить сторону этого многоугольника по данной стороне первого многоугольника и данному радиусу круга.

1) Пусть AB (рис. 230) есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон и O — центр круга. Проведем $OC \perp AB$ и соединим A с C. Дуга AB делится в точке C пополам, следовательно, хорда AC есть сторона правильного вписанного многоугольника, имеющего $2n$ сторон.

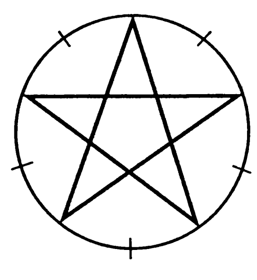


Рис. 229

Рис. 230

2) В $\triangle ACO$ угол O всегда острый (так как дуга ACB всегда меньше полуокружности, и, следовательно, половина ее, дуга AC, меньше четверти окружности); поэтому (§ 194)

$$AC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD,$$

т. е.

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD.$$

Из прямоугольного $\triangle AOD$ определим катет OD:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Следовательно,

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Такова формула удвоения числа сторон правильного вписанного многоугольника (из нее сторону a_{2n} получим посредством извлечения квадратного корня).

Пример. Вычислим сторону правильного вписанного 12-угольника, причем для простоты примем $R = l$ (и, следовательно, $a_6 = 1$);

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} == 2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{3},$$

откуда

$$a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = R \cdot 0{,}517\ldots.$$

Так как стороны правильных одноименных многоугольников пропорциональны их радиусам (§ 218), то при радиусе, равном не единице, а какому-нибудь числу R, для стороны правильного 12-угольника получим такую формулу:

$$a_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = R \cdot 0{,}517\ldots.$$

225. На сколько равных частей можно делить окружность с помощью циркуля и линейки? Применяя указанные в предыдущих задачах способы, мы можем с помощью циркуля и линейки делить окружность на такое число равных частей (и, следовательно, вписывать в окружность правильные многоугольники с таким числом сторон), которое заключается в следующей таблице:

3	$3 \cdot 2$	$3 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	вообще	$3 \cdot 2^n$
4	$4 \cdot 2$	$4 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	"	2^n
5	$5 \cdot 2$	$5 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	"	$5 \cdot 2^n$
15	$15 \cdot 2$	$15 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$	"	$3 \cdot 5 \cdot 2^n$.

Немецкий математик Гаусс (1777–1855 г.г.) доказал, что посредством циркуля и линейки можно делить окружность на такое число равных частей, которое, будучи п р о с т ы м, выражается формулой $2^{2^n} + 1$. Например, можно разделить окружность на 17 равных частей и на 257 равных частей, так как 17 и 257 суть простые числа вида $2^{2^n} + 1$ ($170 = 2^{2^2} + 1$; $257 = 2^{24} + 1$). Доказательство Гаусса выходит за пределы элементарной математики.

Доказано также, что с помощью линейки и циркуля окружность можно делить на такое с о с т а в н о е число равных частей, в состав которого не входят никакие иные простые множители, кроме: 1) множителей вида $2^{2^n} + 1$ и 2) множителя 2 в какой угодно степени. Например, в окружность с помощью циркуля и линейки можно вписать правильный 170-угольник ($170 = 2 \cdot 5 \cdot 17 = 2 \cdot (2^2 + 1) \cdot (2^{2^2} + 1)$).

На всякое иное число равных частей окружность может быть разделена п р и б л и ж е н н о. Пусть, например, требуется разделить окружность на 7 равных частей (или вписать правильный семиугольник). Тогда предварительно вычислим величину центрального угла, он равен: $\frac{360^\circ}{7} = 51\frac{3^\circ}{7}$. Построить точно такой угол мы не можем, но по транспортиру приблизительно можем отложить при центре угол в 51° и тогда получим приблизительно $1/7$ часть окружности.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить формулу для стороны правильного вписанного 24-угольника.

2. Составить формулу для сторон правильных вписанных восьмиугольника и 16-угольника.

3. Составить формулу для сторон правильных описанных треугольника и шестиугольника.

4. Пусть AB, BC и CD будут три последовательные стороны правильного многоугольника, имеющего центр в O. Доказать, что если продолжим стороны AB и CD до взаимного пересечения в точке E, то четырехугольник $OAEC$ может быть вписан в окружность.

5. Доказать, что: 1) всякий вписанный равносторонний многоугольник — правильный; 2) всякий описанный равноугольный многоугольник — правильный.

6. Доказать, что: 1) каждый правильный n-угольник имеет n осей симметрии, причем все эти оси симметрии проходят через его центр; 2) для многоугольника с четным числом сторон центр многоугольника является центром его симметрии.

7. Доказать, что две диагонали правильного пятиугольника, не исходящие из одной вершины, пересекаясь, делятся в среднем и крайнем отношении.

Указание. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, AC и BE — его диагонали, F — точка их пересечения. $\triangle ABC \backsim \triangle ABF$ и т. д.

8. На данной стороне построить: 1) правильный восьмиугольник; 2) правильный 10-угольник.

9. Срезать от данного квадрата углы так, чтобы образовался правильный восьмиугольник.

10. В данный квадрат вписать равносторонний треугольник, помещая одну из его вершин или в вершине квадрата, или в середине какой-либо стороны.

11. Вписать в равносторонний треугольник другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны к сторонам данного.

12. Построить углы в $18°$, $30°$, $72°$, $75°$.

13. Около окружности описан какой-нибудь правильный многоугольник. Пользуясь им, вписать в эту окружность правильный многоугольник, имеющий вдвое более сторон, чем описанный.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ ЧАСТЕЙ

226. Предварительное разъяснение. Отрезок прямой можно сравнить с другим отрезком прямой, принятым за единицу, так как прямые линии при наложении совмещаются. Действительно, только по этой причине мы можем установить, какие отрезки прямых считать равными и неравными; что такое сумма отрезков прямой; какой отрезок более другого в 2, 3, 4,... раза и т. п. Точно так же дуги окружностей одинакового радиуса можно сравнить между собой вследствие того, что такие дуги при наложении совмещаются. Но так как никакая часть окружности (или другой кривой) не может совместиться с прямой, то нельзя путем наложения установить, какой криволинейный отрезок должно считать равным данному прямолинейному отрезку, а следовательно, и то, какой криволинейный отрезок больше данного прямолинейного в 2, 3, 4, ... раза. Таким образом, яв-

ляется необходимость особо определить, что мы будем подразумевать под длиной окружности (или части ее), когда сравниваем ее с прямолинейным отрезком.

Для этой цели мы должны ввести новое понятие, имеющее исключительно большое значение во всей математике, именно понятие о пределе.

Предел числовой последовательности

227. Во многих вопросах алгебры и геометрии приходится встречаться с последовательностями чисел, написанных одно за другим по определенному закону. Например, натуральный ряд чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots,$$

арифметическая и геометрическая прогрессии, продолженные неограниченно:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots,$$
$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots,$$

представляют собой бесконечные последовательности чисел или бесконечные числовые последовательности.

Для каждой такой последовательности можно указать правило, по которому составляются ее члены. Так, в арифметической прогрессии каждый член разнится от предыдущего на одно и то же число, в геометрической прогрессии каждый член равен предшествующему, умноженному на некоторое определенное число (знаменатель прогрессии).

Многие последовательности составляются по более сложным правилам. Так, например, вычисляя $\sqrt{2}$ с недостатком, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем с точностью до $\frac{1}{100}$, затем до $\frac{1}{1000}$ и продолжая это вычисление неограниченно, мы получим бесконечную числовую последовательность:

$$1,4;\ 1,41;\ 1,414;\ 1.4142,\ \ldots,$$

дающую приближенное значение $\sqrt{2}$ с возрастающей степенью точности.

Для этой последовательности нельзя указать простого правила, по которому можно было бы получить новые ее члены, зная предыдущие, но все же можно определить любой член этой последовательности. Так, чтобы получить 4-й ее член, нужно вычислить с точностью до

0,0001, для получения 5-го члена нужно вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 0,00001 и т. д.

Допустим, что члены данной бесконечной последовательности a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... по мере повышения их номера неограниченно приближаются к некоторому числу A. Это значит следующее: существует некоторое число A, такое, что какое бы малое положительное число q мы ни взяли, в данной последовательности можно отыскать член, начиная с которого все члены последовательности по абсолютной величине отличаются от A меньше, чем на q. Мы будем это свойство коротко выражать так: абсолютная величина разности $a_n - A$ неограниченно убывает с возрастанием номера n.

В этом случае число A называется пределом данной бесконечной числовой последовательности. Приведем пример такой последовательности. Составим последовательность десятичных дробей:

$$0,9;\ 0,99;\ 0,999; \ldots.$$

Здесь каждый член получается из предыдущего приписыванием нового десятичного знака 9.

Легко заметить, что члены этой последовательности неограниченно приближаются к единице.

Именно, первый член отличается от единицы на $\frac{1}{10}$, второй на $\frac{1}{100}$, третий на $\frac{1}{1000}$ и, если достаточно продолжить эту последовательность, то можно найти в ней член, начиная с которого все последующие члены будут отличаться от единицы на сколь угодно малую, заранее указанную величину. Следовательно, мы можем сказать, что взятая нами бесконечная числовая последовательность имеет пределом единицу. Другим примером числовой последовательности, имеющей предел, служит последовательность приближенных значений длины отрезка, несоизмеримого с единицей длины (§ 150), вычисленных с недостатком, сначала с точностью до $\frac{1}{10}$, затем — до $\frac{1}{100}$, затем — до $\frac{1}{1000}$ и т. д.

Пределом этой последовательности служит бесконечная десятичная дробь, представляющая точную меру длины данного отрезка. В самом деле, величина бесконечной десятичной дроби заключена между двумя ее приближенными значениями, вычисленными с одинаковой точностью — одно с недостатком, другое с избытком.

Как было показано выше, эта разность неограниченно убывает по мере повышения степени точности приближенных значений. Следовательно, должна неограниченно убывать и разность между самой

бесконечной десятичной дробью и ее приближенными значениями по мере повышения степени точности этих значений. Значит, бесконечная десятичная дробь служит пределом последовательности всех ее приближенных значений, взятых с недостатком (или всех приближенных значений, взятых с избытком).

Легко заметить, что не всякая бесконечная последовательность имеет предел; например, натуральный ряд чисел:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots,$$

очевидно, никакого предела не имеет, так как его члены неограниченно возрастают и ни к какому числу не приближаются.

228. Теорема. ***Всякая бесконечная числовая последовательность может иметь только один предел.***

В справедливости этой теоремы легко убедиться доказательством от противного. В самом деле, предположим, что дана последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n, \ldots,$$

которая имеет два различных предела A и B. В таком случае, в силу того, что A есть предел данной последовательности, абсолютная величина разности $a_n - A$ должна неограниченно убывать с возрастанием n. В силу того, что B есть тоже предел данной последовательности, абсолютная величина разности $A - n - B$ также должна неограниченно убывать с возрастанием n.

Но в таком случае абсолютная величина разности

$$(a_n - A) - (a_n - B)$$

должна также или неограниченно убывать, или быть равной нулю. Но эта последняя разность равна разности чисел $B - A$ и, следовательно, есть некоторое вполне определенное, отличное от нуля число. Это число не зависит от номера n и при возрастании n вовсе не изменяется. Таким образом, предположение, что существуют два предела числовой последовательности, привело нас к противоречию.

229. Предел возрастающей бесконечной числовой последовательности. Рассмотрим такую последовательность a_1, a_2, a_3, $\ldots a_n$, $\ldots$, в которой каждый следующий член больше предыдущего, т. е. $a_{n+1} > a_n$, и в то же время все члены последовательности меньше некоторого определенного числа M, т. е. для любого номера $na_n < M$.

В этом случае последовательность имеет определенный предел (теорема Вейерштрасса).

230. Доказательство. Пусть дана бесконечная числовая последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n,\ \ldots, \tag{1}$$

в которой каждый член больше предыдущего или равен ему ($a_{n+1} \geqslant a_n$), причем среди членов последовательности нет числа, большего данного числа M, например, нет числа, большего, чем 10. Возьмем число 9 и смотрим, нет ли среди членов последовательности (1) чисел, больше, чем 9. Допустим, что таких нет. Возьмем число 8 и смотрим, имеются ли в последовательности (1) числа больше, чем 8. Допустим, что такие есть. Тогда записываем число 8, затем делим промежуток от 8 до 9 на 10 частей и испытываем последовательно числа: 8,1; 8,2; 8,3; ..., т. е. смотрим, имеются ли среди членов последовательности (1) числа, большие, чем 8,1. Если есть, то ставим тот же вопрос для числа 8,2 и т. д. Допустим, что в последовательности (1) есть числа, большие, чем 8,6, но нет чисел, больших, чем 8,7. Тогда делаем вторую запись: пишем число 8,6, затем разбиваем промежуток от 8,6 до 8,7 на 10 частей и испытываем таким же образом последовательно числа: 8,61; 8,62; 8,63; .... Допустим, что в последовательности (1) есть числа, большие, чем 8,64, но нет чисел, больших, чем 8,65. Тогда делаем третью запись 8,64 и поступаем таким же образом для промежутка от 8,64 до 8,65. Продолжая этот процесс неограниченно, мы придем к бесконечной десятичной дроби: 8,64 ..., т. е. к некоторому действительному числу. Назовем его α и возьмем его приближенные значения с n десятичными знаками с недостатком и с избытком. Первое назовем α_n, второе — α'_n. При этом, как известно (§ 150),

$$\alpha_n < \alpha < \alpha'_n \quad \text{и} \quad \alpha'_n - \alpha_n = \frac{1}{10^n}.$$

Из способа образования действительного числа α следует, что среди членов последовательности (1) нет чисел, бóльших a'_n, но имеются числа, большие α. Пусть α_k — одно из таких чисел:

$$\alpha_n < \alpha_k < \alpha'_n.$$

В силу возрастания последовательности (1) и отсутствия в ней членов, больших α'_n, заключаем, что все следующие члены последовательности $\alpha_{k+1},\ \alpha_{k+2},\ \ldots$ также заключены между α и α'_n, т. е. если $m > k$, то $\alpha_n < \alpha_m < \alpha'_n$.

Так как действительное число α также заключено между α_n и α'_n, то абсолютная величина разности $\alpha_m - \alpha$ меньше разности чисел α_n и α'_n. Но $\alpha'_n - \alpha_n = \dfrac{1}{10}$, следовательно,

$$|\alpha_m - \alpha| < \frac{1}{10^n}. \tag{2}$$

Таким образом, для любого значения n можно указать такое число k, что при $m \geqslant k$ имеет место неравенство (2). Так как при неограниченном возрастании n дробь $\dfrac{1}{10^n}$ неограниченно убывает, то из равенства (2) следует,

что действительное число α есть предел последовательности (1). Таким образом, числовая последовательность (1) имеет определенный предел.

231. Предел переменной величины. Если дана последовательность

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots,$$

то n-й член ее a_n можно назвать переменной величиной, числовое значение которой зависит от ее номера n. Этим выражением «переменная величина» часто пользуются для упрощения речи. Так, вместо выражения «дана бесконечная числовая последовательность $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$», принято говорить «дана переменная величина a_n, принимающая последовательно ряд значений $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$». Если пользоваться этим способом выражения, то можно говорить не о пределе последовательности, а о пределе переменной величины.

В таком случае, предложение, доказанное в § 228, можно высказать в форме: «Всякая переменная величина может стремиться лишь к одному пределу». Это предложение часто высказывают так: «если даны две переменные величины a_n и b_n, причем все значения первой равны соответствующим значениям второй: $a_1 = b_1$ $a_2 = b_2$, $a_n = b_n, \ldots$, то предел первой величины, конечно, если он существует, равен пределу второй», или короче: «если две переменные величины равны, то равны и их пределы».

Предложение (§ 229) о пределе возрастающей числовой последовательности можно высказать так: *если переменная величина a_n возрастает с возрастанием номера n и в то же время остается меньше некоторого постоянного числа, то эта переменная величина имеет предел.*

Длина окружности

Понятие о пределе даст возможность точно определить, что мы подразумеваем под длиной окружности. Предварительно докажем следующие леммы.

232. Лемма 1. ***Выпуклая ломаная*** ($ABCD$, рис. 231) ***меньше всякой другой ломаной*** ($AEFGD$)***, объемлющей первую.***

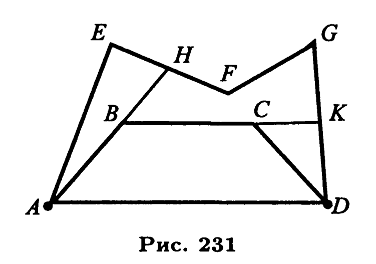


Рис. 231

Выражения «объемлющая ломаная», «объемлемая ломаная» имеют следующий смысл.

Пусть две ломаные (как те, которые изображены у нас на рисунке) имеют одни и те же концы A и D и расположены таким образом, что одна ломаная ($ABCD$) вся лежит внутри многоугольника, образованного другой ломаной и отрезком AD, соединяющим концы A

и D; тогда внешняя ломаная называется объемлющей, а внутренняя ломаная — объемлемой.

Предстоит доказать, что объемлемая ломаная $ABCD$ (если она выпуклая) короче всякой объемлющей линии $AEFGD$ (все равно — выпуклой или невыпуклой), т. е. что

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

Продолжим стороны выпуклой ломаной так, как указано на рисунке. Тогда, приняв во внимание, что отрезок прямой меньше всякой ломаной, соединяющей концы отрезка, мы можем написать следующие неравенства:

$$AB + BH < AE + EH;$$
$$BC + CK < BH + HF + FG + GK;$$
$$CD < CK + KD.$$

Сложим почленно все эти неравенства и затем от обеих частей полученного неравенства отнимем вспомогательные отрезки BH и CK; далее, заменив сумму $EH + HF$ отрезком EF и сумму $GK + KD$ отрезком GD, получим то неравенство, которое требовалось доказать.

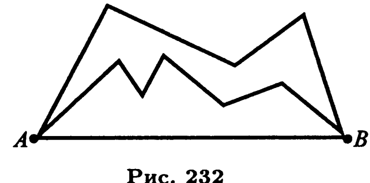


Рис. 232

Замечание. Если бы объемлемая линия не была выпуклой (рис. 232), то изложенное доказательство нельзя было бы применить. В этом случае объемлемая ломаная может оказаться и больше объемлющей.

233. Лемма 2. ***Периметр выпуклого многоугольника*** $(ABCD)$ ***меньше периметра всякого другого многоугольника*** $(MNPQRL)$, ***объемлющего первый*** (рис. 233).

Требуется доказать, что

$$AB + BC + CD + DA < LM + MN + NP + PQ + QR + RL.$$

Продолжив в обоих направлениях одну какую-нибудь сторону AD выпуклого многоугольника, применим к ломаным линиям $ABCD$ и $ATMNPQRSD$, соединяющим точки A и D, лемму предыдущего параграфа; получим неравенство:

$$AB + BC + CD < AT + TM + MN + NP + PQ + QR + RS + SD.$$

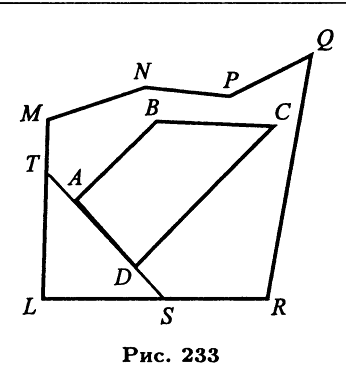


Рис. 233

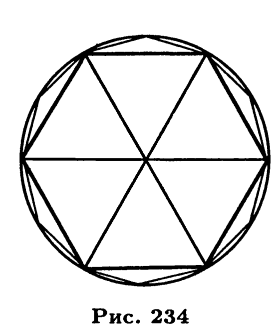


Рис. 234

С другой стороны, так как отрезок ST меньше ломаной SLT, то можем написать:

$$TA + AD + DS < TL + LS.$$

Сложим почленно эти два неравенства и отнимем от обеих частей вспомогательные отрезки AT и DS; далее, заменив сумму $TL + TM$ отрезком LM и сумму $LS + RS$ отрезком LR, получим то, что требовалось доказать.

234. Определение длины окружности. Впишем в данную окружность (рис. 234) правильный многоугольник, например шестиугольник, и на какой-нибудь прямой MN (рис. 235) отложим отрезок

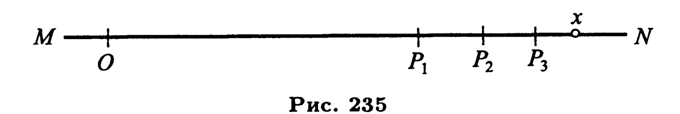


Рис. 235

OP_1, равный периметру этого шестиугольника (на нашем рисунке этот периметр изображен по недостатку свободного места в уменьшенном виде). Удвоим теперь число сторон вписанного шестиугольника, т. е. вместо шестиугольника возьмем правильный вписанный 12-угольник. Найдем также его периметр и отложим его на той же прямой MN от той же точки O; пусть тогда получится отрезок OP_2, который должен быть больше OP_1, так как вместо каждой стороны шестиугольника мы теперь берем ломаную (из двух сторон 12-угольника), которая длиннее прямой. Удвоим снова число сторон вписанного 12-угольника, т. е. возьмем теперь правильный 24-угольник (на рисунке он не указан), найдем его периметр и отложим его на MN от той же точки O; мы

получим тогда отрезок OP_3, который будет больше OP_2 по той же причине, по какой OP_2 больше OP_1.

Вообразим, что такой процесс удвоения и откладывания периметров продолжается все далее и далее. Тогда мы получим неограниченную последовательность периметров OP_1, OP_2, $OP_3, \ldots$, которая является возрастающей последовательностью. Однако возрастание это не может быть неограниченным, так как периметр всякого вписанного многоугольника (выпуклого), каково бы ни было число его сторон, всегда остается меньше периметра любого описанного многоугольника (как его объемлющего). Вследствие этого полученная последовательность периметров правильных вписанных многоугольников имеет определенный предел (§ 229). Этот предел и принимают за длину окружности. Таким образом, мы принимаем следующее определение: *за длину окружности принимается тот предел, к которому стремится (приближается) переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в эту окружность, когда число сторон его неограниченно удваивается.*

Замечание. Можно доказать (мы опускаем это доказательство), что предел этот не зависит от того, с какого многоугольника мы начинаем удвоение. Более того, можно доказать, что если даже вписанные многоугольники и не будут правильные, все же периметры их стремятся к тому же самому пределу, как и периметры правильных многоугольников, лишь бы только стороны их неограниченно уменьшались (и, следовательно, число сторон их неограниченно увеличивалось) путем ли удвоения, как мы это предполагали для правильных многоугольников, или по какому-нибудь иному закону (мы опускаем это доказательство).

Таким образом, для каждой окружности существует свой единственный предел, к которому стремится периметр вписанного выпуклого многоугольника, когда стороны его неограниченно уменьшаются; предел этот и принимается за длину окружности.

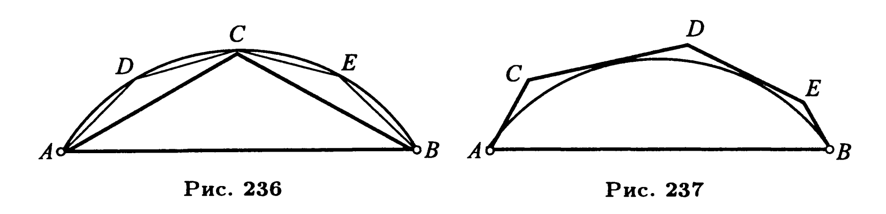


Рис. 236 Рис. 237

Равным образом за длину какой-нибудь дуги окружности AB (рис. 236) принимается предел, к которому стремится переменный периметр ломаной линии, вписанной в эту дугу и имеющей с ней одни и те же концы, когда число сторон ломаной неограниченно удваивается.

235. Допущения. Для простоты изложения мы примем без доказательства следующие, почти очевидные, предложения:

Длина дуги окружности: 1) *больше стягивающей ее хорды*, но 2) *меньше периметра всякой ломаной линии, описанной около этой дуги и имеющей с ней одни и те же концы* (рис. 237).

236. Доказательство этих предложений.

1) Пусть ACB (рис. 236) — дуга окружности и AB — стягивающая ее хорда; требуется доказать, что дуга больше этой хорды.

Предположим, что в дугу мы вписываем правильные ломаные таким образом: первая ломаная пусть будет составлена из двух хорд AC и CB; вторую ломаную получим путем удвоения числа сторон первой ломаной; это будет ломаная $ADCEB$, состоящая из четырех хорд; третью ломаную получим удвоением числа сторон второй ломаной; она будет состоять из восьми хорд. Вообразим, что этот процесс удвоения продолжается неограниченно. Тогда с каждым удвоением периметр ломаной будет все возрастать; например:

$$AD + DC + CE + EB > AC + CB,$$

так как

$$AD + DC > AC \quad \text{и} \quad CE + EB > CB.$$

Вследствие этого предел, к которому стремится этот периметр, должен быть больше периметра первой ломаной, т.е. больше суммы $AC + CB$, и, значит, должен быть и подавно больше хорды AB. Но предел этот принимается за длину дуги ACB, значит, эта дуга больше хорды AB.

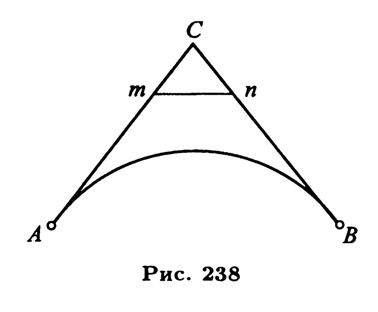


Рис. 238

2) Пусть около дуги описана какая-нибудь ломаная линия (правильная или неправильная — все равно) (рис. 237). Если концы ломаной совпадают с концами дуги, то эту дугу можно рассматривать как сумму нескольких дуг, из которых каждая объемлется ломаной, состоящей только из двух отрезков прямой. Пусть одна из таких частей будет дуга AB (рис. 238). Докажем, что длина этой дуги меньше суммы $AC + CB$, которую мы для краткости обозначим одной буквой S. Для доказательства возьмем вспомогательную ломаную $AmnB$, которая получится, если мы срежем угол C каким-нибудь отрезком прямой mn, не пересекающимся с дугой AB (что всегда возможно, если ломаная описана, т.е. составлена из касательных). Обозначим длину этой вспомогательной ломаной $AmnB$ буквой S_1. Так как $mn < mC + Cn$, то $S_1 < S$.

Докажем теперь, что предел, к которому стремится переменный периметр правильной ломаной, вписанной в дугу AB, при неограниченном удвоении числа сторон ломаной не может быть больше S_1. Обозначим этот

предел буквой L и допустим, что $L > S_1$. Так как переменный периметр приближается к своему пределу как угодно близко, то разность между L и этим периметром может сделаться меньше разности $L - S_1$; тогда, значит, периметр вписанной ломаной сделается больше S_1. Но это невозможно, так как всякая выпуклая ломаная линия, вписанная в дугу AB, есть объемлемая по отношению к объемлющей ломаной $AmnB$ и потому она меньше S_1. Следовательно, нельзя допустить, что $L > S$. Но тогда L должно быть или меньше S_1, или в крайнем случае равно S_1. Но так как $S_1 < S$, то и в этом и в другом случае должно быть: $L < S$, что и требуется доказать.

237. Нахождение длины окружности. Для этой цели можно пользоваться формулой удвоения, которую мы вывели раньше (§ 224), т. е. формулой:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Если радиус R примем за 1, то формула эта примет более простой вид:

$$a_{2n}^2 = 2 - 2\sqrt{r^2 - \frac{a_n^2}{4}}.$$

Обозначая, по принятому, через a_n сторону правильного вписанного многоугольника, имеющего n сторон, будем иметь: $a_6 = R = 1$. Применяя формулу удвоения, находим:

$$a_{12}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 - \sqrt{3};$$

$$a_2 4^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{12}^2}{4}}; \quad a_{48}^2 = 2 - 2\sqrt{1 - \frac{a_{24}^2}{4}} \quad \text{и т. д.}$$

Положим, что мы прекратили удвоение на 96-угольнике. Чтобы получить его периметр, надо сторону умножить на 96. Этот периметр можно принять за приближенное значение длины окружности. Обозначив его через p_{96} и выполнив вычисления, найдем:

$$p_{96} = 6{,}2820638\ldots.$$

При радиусе, равном R, получим:

$$p_{96} = R \cdot 6{,}2820638\ldots, \quad \text{или} \quad p_{96} = 2R \cdot 3{,}1410319\ldots.$$

Обозначая длину окружности буквой C, мы получим для нее приближенную формулу:

$$C = 2R \cdot 3{,}1410319\ldots.$$

Если бы мы прекратили процесс удвоения на 192-угольнике, то полу-

чили бы для длины окружности более точное значение, именно:

$$C = 2R \cdot 3{,}14145247\ldots.$$

Продолжая процесс удвоения, можно получать для длины окружности все более и более точные значения.

238. Отношение длины окружности к диаметру. Рассматривая процесс нахождения длины окружности, можно заметить, что число, на которое нужно умножить диаметр, чтобы получить длину окружности, не зависит от величины самого диаметра, так что если мы нашли, что длина какой-нибудь окружности равна ее диаметру, умноженному на некоторое число, то и длина всякой другой окружности будет равна ее диаметру, умноженному на то же самое число.

В самом деле, возьмем две окружности: одну радиуса R, другую радиуса r. Длину первой окружности обозначим через C, длину второй — через c. Впишем в каждую из них правильный многоугольник с одним и тем же числом сторон и будем удваивать число сторон каждого из этих многоугольников.

Обозначим через P_n переменный периметр правильного многоугольника, вписанного в первую окружность, и через p_n переменный периметр правильного многоугольника с тем же числом сторон, вписанного во вторую окружность.

В силу теорем, доказанных в § 218, мы можем написать:

$$\frac{P_n}{R} = \frac{p_n}{r}, \quad \text{или} \quad \frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}.$$

Переменный периметр P_n имеет пределом длину C первой окружности. Переменный периметр p_n имеет пределом длину c второй окружности. А потому из равенства $\frac{P_n}{2R} = \frac{p_n}{2r}$ вытекает $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$ (§§ 228 и 231). Таким образом, мы можем сказать, что *отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное для всех окружностей.*

Это постоянное число принято обозначать греческой буквой π*).

Мы можем, таким образом, для длины C окружности написать такую формулу:

$$C = 2R \cdot \pi \quad \text{или} \quad C = 2\pi R.$$

Доказано, что число π является числом иррациональным, и, значит, оно не может быть выражено точно никаким рациональным числом. Но его приближенные значения можно находить различными спо-

*) Обозначение это введено, по всей вероятности, в XVII в. Буква π (пи) есть начальная буква греческого слова περιφεια (окружность).

собами с какой угодно точностью. Приняв периметр вписанного 96-угольника за приближенную длину окружности, мы получим для π приближенное значение 3,14 с недостатком и с точностью до 0,01. Эта точность для практических целей почти всегда достаточна. В случаях особенной точности можно довольствоваться таким приближенным значением (с избытком): $\pi = 3{,}1416$.

Ученые, пользуясь усовершенствованными способами, вычислили π с точностью, далеко превосходящей всякие практические требования (так, английский математик Шенкс в 1873 г. нашел 707 десятичных знаков числа π*).

Полезно заметить, что еще в III в. до н. э. знаменитый сиракузский геометр Архимед нашел для π очень простое число $22/7$, т. е. $3\,1/7$. Это число несколько более π и разнится от него менее чем на 2 тысячных.

При решении геометрических задач часто встречается число, обратное числу π, т. е. равное дроби $1/\pi$. Полезно запомнить несколько цифр этого числа:

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183098\ldots.$$

239. Длина дуги, содержащей n градусов. Длина окружности есть $2\pi R$, значит, длина дуги в 1° равна $\dfrac{2\pi R}{360} = \dfrac{\pi R}{180}$; следовательно, длина s дуги, содержащей $n°$, выразится так:

$$s = \frac{\pi R n}{180}.$$

Если дуга выражена в минутах (n') или в секундах (n''), то длина ее определяется соответственно формулами:

$$s = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60} \quad \text{или} \quad s = \frac{\pi R n}{180 \cdot 60 \cdot 60},$$

где n — число минут или секунд.

---

*) Для запоминания довольно длинного ряда цифр, выражающих число π, можно пользоваться следующим французским двустишием:

Que j'aime á faire apprendre
Un nombre utile aux hommes!

или следующим русским (придуманным покойным преподавателем средней школы Шенроком):

Кто и шутя и скоро пожелает (ъ)
Пи узнать число уж (ъ) з н а е т (ъ)!

Если выписать в ряд числа букв, заключающихся в каждом слове этих фраз (написанных по старой орфографии), то получим для π: приближенное число (с избытком), 3,141596536, верное до одной половины десятибиллионной.

240. Задача. *Вычислить с точностью до* 1 *мм радиус такой окружности, дуга которой, содержащая* 81° 21′36″, *равна* 0,452 *м.*

Обратив 81° 21′36″ в секунды, получим число 292896.

Из уравнения

$$0{,}452 = \frac{\pi R \cdot 292896}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

находим:

$$R = \frac{0{,}452 \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{292896\pi} = \frac{1}{\pi} = 0{,}318\,(\text{м}).$$

241. Задача. *Определить число градусов дуги, длина которой равна радиусу.*

Заменив в формуле, определяющей длину дуги в $n°$, величину s на R, получим уравнение:

$$R = \frac{\pi R n}{180} \quad \text{или} \quad 1 = \frac{\pi n}{180},$$

откуда

$$n° = \frac{180°}{\pi} = 180° \cdot \frac{1}{\pi} = 180° \cdot 0{,}3183098 = 57°{,}295764 = 57°17'44'',8.$$

Заметим, что дуга, равная радиусу, называется радианом.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что в двух кругах отношение центральных углов, соответствующих дугам, имеющим одинаковую длину, равно обратному отношению радиусов.

2. На окружности взята точка A и через нее проведены: диаметр AB, сторона правильного вписанного шестиугольника AC и касательная MN. Из центра O опущен на AC перпендикуляр и продолжен до пересечения с касательной в точке D. От этой точки отложен по касательной (через точку A) отрезок DE, равный трем радиусам. Точка E соединена с концом диаметра B. Определить, как велика погрешность, если прямую BE возьмем за длину полуокружности.

3. На диаметре данной полуокружности построены две равные полуокружности, и в ту часть плоскости, которая заключена между тремя полуокружностями, вписан круг. Доказать, что диаметр этого круга относится к диаметру равных полуокружностей, как 2:3.

4. Вычислить в градусах, минутах и секундах дугу, равную стороне квадрата, вписанного в эту окружность.

5. Вычислить длину 1° земного экватора, принимая радиус Земли равным 6400 км.

Глава V

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

1. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

242. Понятие о площади. Каждый из нас имеет некоторое представление из повседневной жизни о площади.

Мы займемся уточнением понятия о площади фигуры и установлением способов ее измерения.

243. Основные допущения о площадях. Величина части плоскости, заключенной внутри многоугольника или какой-нибудь другой плоской замкнутой фигуры, называется площадью этой фигуры.

Мы ставим перед собой задачу найти для этой величины выражение в виде некоторого числа, т. е. задачу найти число, измеряющее площадь.

При этом мы требуем, чтобы соотношение между площадями фигур и числами, их измеряющими, удовлетворяло следующим условиям:

1) числа, измеряющие площади двух равных фигур, должны быть равны между собой;

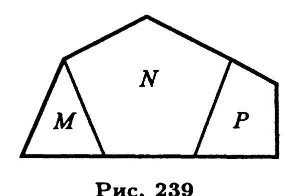
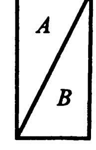


Рис. 239



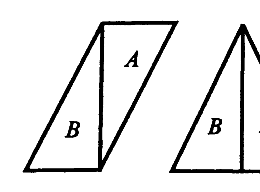


Рис. 240

2) если данная фигура разбита на несколько частей (M, N, P, рис. 239), составляющих каждая замкнутую фигуру, то число, измеряющее площадь всей фигуры, должно быть равно сумме чисел, измеряющих площади отдельных ее частей.

Замечание. Относительно последнего требования необходимо сделать следующее важное замечание. Площади мы измеряем положительными числами.

Но сумма двух положительных чисел всегда больше каждого из слагаемых. Поэтому, чтобы можно было принять условие 2-е, необходимо, чтобы и площади фигур обладали соответствующим свойством. Поясним это. Положим, что, разбив данную фигуру на несколько частей, мы будем переставлять эти части и получать таким образом новые фигуры (подобно тому, как на рис. 240 перемещены части A и B). Спрашивается: нельзя ли путем этих перестановок получить такую фигуру, которая могла бы целиком уместиться внутри первоначальной фигуры? Если бы это оказалось возможным, то получились бы две фигуры, лежащие одна внутри другой, причем числа, измеряющие их площади, в силу условия 2-го, были бы равны между собой.

Таким образом, число, измеряющее площадь всей фигуры, оказалось бы равным числу, измеряющему площадь лишь некоторой части этой фигуры, т. е. сумма была бы равна одному из слагаемых, что невозможно для положительных чисел. Следовательно, в этом случае условие 2-е не могло бы быть принято. Впервые обратил внимание на этот вопрос итальянский математик Децольт (1881). Невозможность указанной выше перестановки частей фигуры принималась вначале как некоторый постулат, но позднее эта невозможность была строго доказана Шуром, Киплингом, Шатуновским и Гильбертом. Это свойство площадей фигур и делает возможным принятие условия 2-го.

Фигуры, имеющие равные площади, принято называть равновеликими. Конечно, равные фигуры всегда и равновелики, но равновеликие фигуры могут быть неравными (как те, которые изображены на рис. 240).

244. Понятие об измерении площади. Для измерения площади данной фигуры прежде всего выбирают единицу площади. За такую единицу берут площадь квадрата, у которого сторона равна линейной единице, например одному метру, одному сантиметру и т. п. Для фигур простейшего типа можно получить меру площади следующим образом. Накладываем единицу площади на измеряемую площадь столько раз, сколько это возможно. Это можно

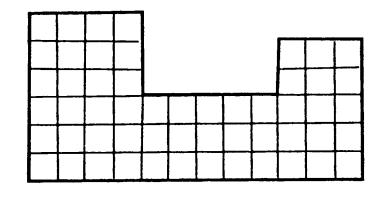


Рис. 241

сделать для небольших площадей, которые можно начертить на бумаге при помощи прозрачной миллиметровой бумаги, разделенной равно отстоящими параллельными прямыми на маленькие квадраты, принятые за единицу площади. Допустим, что на фигуру, площадь которой надо измерить, наложена такая сеть квадратов. Тогда, если контур данной фигуры представляет собой ломаную линию (рис. 241), стороны которой совпадают с частями прямых линий, образующих сеть квадратов, то число квадратов, лежащих внутри фигуры, составит точную меру измеряемой площади.

В действительности измерение площадей производится не путем накладывания единицы площади или ее доли, а косвенным путем, посредством измерения некоторых линий фигуры. Как это делается, мы увидим из следующих параграфов.

245. Основание и высота. Условимся одну из сторон треугольника или параллелограмма называть **основанием** этих фигур, а перпендикуляр, опущенный на эту сторону из вершины треугольника или из какой-нибудь точки противоположной стороны параллелограмма, будем называть **высотой**.

В прямоугольнике за высоту можно взять сторону, перпендикулярную к той, которая принята за основание.

В трапеции основаниями называют обе параллельные стороны, а высотой — общий перпендикуляр между ними.

Основание и высота прямоугольника называются его **измерениями**.

246. Теорема. ***Площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.***

Это краткое предложение надо понимать так: число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных единицах, равно произведению чисел, выражающих основание и высоту его в соответствующих линейных единицах.

При доказательстве могут представиться три случая:

1) Длины основания и высоты (измеренных одной и той же единицей) выражаются целыми числами.

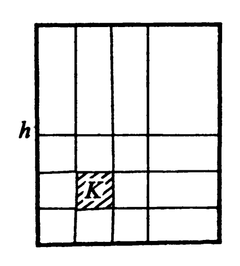


Рис. 242

Пусть у данного прямоугольника (рис. 242) основание равно целому числу b линейных единиц, а высота — целому числу h тех же единиц. Разделим основание на b и высоту на h равных частей, проведем через точки деления ряд прямых, параллельных высоте, и другой ряд прямых, параллельных основанию. От взаимного пересечения этих

прямых образуются некоторые четырехугольники. Возьмем какой-нибудь один из них, например четырехугольник k (покрытый на рисунке штрихами). Так как стороны этого четырехугольника, по построению, параллельны соответствующим сторонам данного прямоугольника, то все углы его прямые; значит, четырехугольник k есть прямоугольник. С другой стороны, каждая сторона этого прямоугольника равна расстоянию между соседними параллельными прямыми, т. е. равна одной и той же линейной единице. Значит, прямоугольник k представляет собой квадрат, а именно, ту квадратную единицу, которая соответствует взятой линейной единице (если, например, основание и высота были измерены линейными сантиметрами, то площадь квадрата k есть квадратный сантиметр). Так как сказанное об одном четырехугольнике справедливо и для всякого другого, то, значит, проведением указанных параллельных прямых мы разбиваем всю площадь данного прямоугольника на квадратные единицы. Найдем их число. Очевидно, что ряд прямых, параллельных основанию, разделяет прямоугольник на столько равных горизонтальных полос, сколько в высоте содержится линейных единиц, т. е. на h равных полос. С другой стороны, ряд прямых, параллельных высоте, разбивает каждую горизонтальную полосу на столько квадратных единиц, сколько в основании содержится линейных единиц, т. е. на b квадратных единиц. Значит, всех квадратных единиц окажется $b \cdot h$. Таким образом,

$$\text{площадь прямоугольника} = bh,$$

т. е. она равна произведению основания на высоту.

2) Длины основания и высоты (измеренных одной и той же единицей) выражаются дробными числами.

Пусть, например, у данного прямоугольника

$$\text{основание} = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \text{ линейных единиц,}$$

$$\text{высота} = 4\frac{3}{5} = \frac{23}{5} \text{ той же единицы.}$$

Приведя дроби к одинаковому знаменателю, получим:

$$\text{основание} = \frac{35}{10}; \quad \text{высота} = \frac{46}{10}.$$

Примем $1/10$ долю линейной единицы за новую единицу длины. Тогда мы можем сказать, что основание содержит 35 этих новых единиц, а высота 46 тех же единиц. Значит, по доказанному, в случае 1-м, площадь прямоугольника равна $35 \cdot 46$ таких квадратных единиц, которые соответствуют $1/100$ новой единице длины. Но эта квадрат-

ная единица составляет часть квадратной единицы, соответствующей прежней линейной единице; значит, площадь прямоугольника в прежних квадратных единицах равна:

$$\frac{35 \cdot 46}{100} = \frac{35}{10} \cdot \frac{46}{10} = 3\frac{1}{2} \cdot 4\frac{3}{5} \text{ (квадратных единиц).}$$

3) Основание и высота (или только одно из этих измерений) несоизмеримы с единицей длины, и, следовательно, их длины выражаются иррациональными числами.

В этом случае можно довольствоваться приближенным результатом измерения площади с желаемой степенью точности.

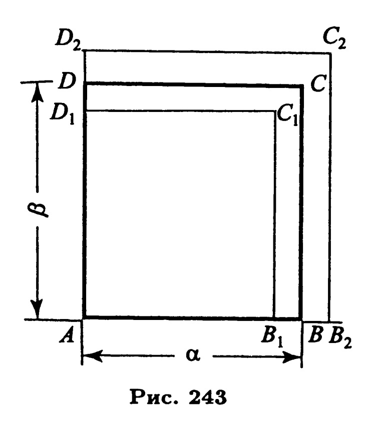


Рис. 243

Но можно и в этом случае найти точную меру площади прямоугольника. Пусть длина основания AB прямоугольника $ABCD$ (рис. 243) выражается иррациональным числом α, а для высоты AD — иррациональным числом β. Каждое из этих чисел может быть представлено в виде бесконечной непериодической десятичной дроби (§ 150). Возьмем приближенные значения этих чисел в виде десятичных дробей с n десятичными знаками сначала с недостатком, затем с избытком. Приближенные значения с недостатком обозначим через α_n (для первого числа) и β_n (для второго числа), а приближенные значения с избытком соответственно через α'_n и β'_n. Отложим на основании AB от точки A сначала отрезок AB_1, численная величина которого равна α_n, затем отрезок AB_2, численная величина которого равна α'_n. Очевидно, $AB_1 < AB$ и $AB_2 > AB$. Отложим, далее, на высоте AD от точки A отрезки AD_1 и AD_2, численные величины которых равны соответственно β_n и β'_n. Очевидно, $AD_1 < AD$ и $AD_2 > AD$.

Построим два вспомогательных прямоугольника $AB_1C_1D_1$ и $AB_2C_2D_2$, у каждого из них основание и высота выражаются рациональными числами:

$$AB_1 = \alpha_n, \quad 2 = \alpha'_n, \quad AD_1 = \beta_n, \quad AD_2 = \beta'_n.$$

Поэтому, согласно доказанному в случае 2-м,

$$\text{площадь } AB_1C_1D_1 = \alpha_n\beta_n,$$
$$\text{площадь } AB_2C_2D_2 = \alpha'_n\beta'_n.$$

Будем теперь увеличивать n неограниченно. В таком случае α_n и α'_n будут иметь пределом иррациональное число α, а числа β_n и β'_n будут иметь пределом иррациональное число β. Произведения же $\alpha_n\beta_n$ и $\alpha'_n\beta'_n$, как известно из алгебры, имеют общий предел, называемый произведнием чисел α и β(§ 154).

Этот общий предел произведений $\alpha_n\beta_n$ и $\alpha'_n\beta'_n$, т.е. произведение $\alpha\beta$, и принимают за меру площади прямоугольника $ABCD$. Легко непосредственно убедиться, что эта мера удовлетворяет тем двум условиям, которым должно удовлетворять число, имеющее площадь (§ 243), именно: 1) числа, измеряющие площади равных прямоугольников, равны; 2) если прямоугольник разбить на несколько прямоугольников, то число, измеряющее площадь всего прямоугольника, будет равно сумме чисел, измеряющих площади составляющих прямоугольников. Таким образом, и в этом случае площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту.

247. Теорема. ***Площадь параллелограмма*** ($ABCD$, рис. 244 и 245) ***равна произведению основания на высоту.***

На основании AD (на том и другом рисунке) построим прямоугольник $AEFD$, у которого сторона EF составляет продолжение стороны BC.

При этом могут представиться два случая:

1) сторона BC лежит вне стороны EF и 2) сторона BC частью совпадает с EF (первый случай изображен на рис. 244, второй — на рис. 245). Докажем, что и в том, и другом случае

площадь $ABCD$ = площади $AEFD$.

Если параллелограмм дополним треугольником AEB, а прямоуголь-

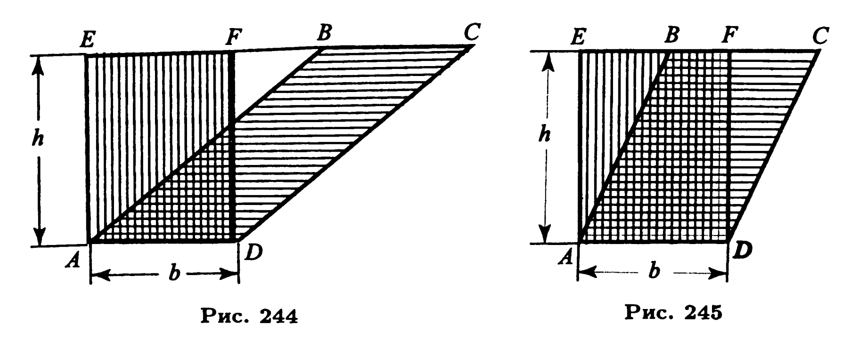


Рис. 244

Рис. 245

ник дополним треугольником DFC, то мы получим одну и ту же трапецию $AECD$. Так как дополняющие треугольники равны (они имеют по две стороны и углу, заключенному между ними, соответственно равными), то параллелограмм и прямоугольник должны быть

равновелики. Но площадь $AEFD = bh$; следовательно, и площадь $ABCD = bh$, причем b можно рассматривать как основание параллелограмма и A — как его высоту.

248. Теорема. ***Площадь треугольника*** (ABC, рис. 246) ***равна половине произведения основания на высоту.***

Проведем $BE \| AC$ и $AE \| BC$. Тогда получим параллелограмм $AEBC$, площадь которого, по доказанному, равна bh. Но площадь $\triangle ABC$ составляет половину площади $AEBC$; следовательно,

$$\text{площадь } \triangle ABC = bh.$$

Замечание. Легко убедиться, что всякий треугольник разлагается на части, перемещением которых можно образовать прямоугольник, имеющий одинаковое с треугольником основание и высоту, вдвое меньшую высоты треугольника (рис. 247).

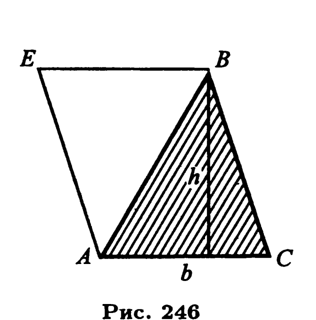


Рис. 246

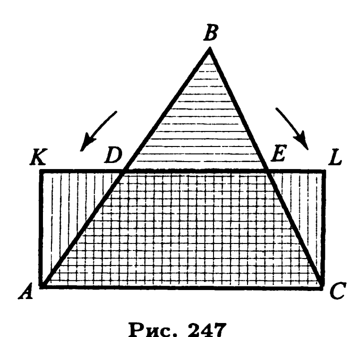


Рис. 247

249. Следствия. 1) *Треугольники с равными основаниями и равными высотами равновелики.*

Если, например, вершину $B \triangle ABC$ (рис. 248) будем перемещать по прямой, параллельной основанию AC, а основание оставим то же самое, то площадь треугольника не будет изменяться.

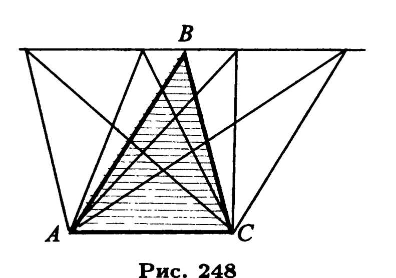


Рис. 248

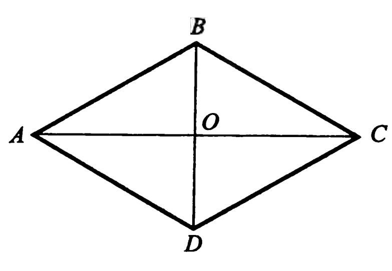


Рис. 249

2) *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, потому что один катет можно взять за основание, а другой — за высоту.*

3) *Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.* Действительно, если $ABCD$ (рис. 249) есть ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Поэтому

$$\text{площадь } \triangle ABC = \frac{1}{2} AC \cdot OB$$
$$\text{площадь } \triangle ACD = \frac{1}{2} AC \cdot OD$$

$$\text{площадь } ABCD = \frac{1}{2} AC \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

4) *Площади двух треугольников относятся как произведения их оснований на высоты* (множитель $1/2$ сокращается).

250. Теорема. ***Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.***

Проведя в трапеции $ABCD$ (рис. 250) диагональ AC, мы можем рассматривать ее площадь как сумму площадей двух треугольников CAD и ABC. Поэтому

$$\text{площадь трапеции } ABCD = \frac{1}{2} AD \cdot h = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot h.$$

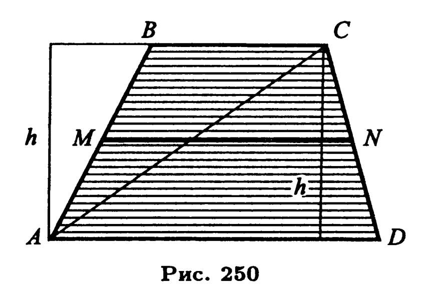


Рис. 250

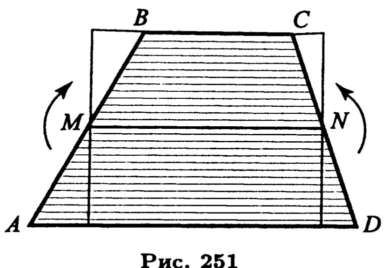


Рис. 251

251. Следствие. Если MN (рис. 251) есть средняя линия трапеции, то, как известно (§ 99),

$$MN = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Поэтому

$$\text{площадь трапеции } ABCD = MN \cdot h,$$

т. е. *площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.*

Это же можно видеть и непосредственно из рис. 251.

252. Теорема. ***Площадь всякого описанного многоугольника равна произведению периметра на половину радиуса.***

Соединив центр O (рис. 252) со всеми вершинами описанного многоугольника, мы разделим его на треугольники, в которых за основания можно взять стороны многоугольника, а за высоты — радиус круга.

Обозначив этот радиус через R, будем иметь:

площадь $\triangle AOB = AB \cdot \frac{1}{2}R$, площадь $\triangle BOC = BC \cdot \frac{1}{2}R$ и т. д.

Следовательно,

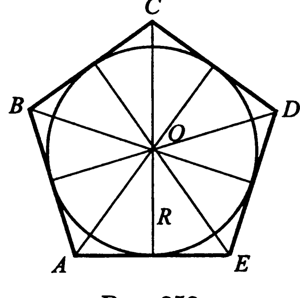
площадь $ABCDE = (AB + BC + CD + DE + EA) \cdot \frac{1}{2}R = P \cdot \frac{1}{2}R$,

где буквой P обозначен периметр многоугольника.

Следствие. *Площадь правильного многоугольника равна произведению периметра на половину апофемы, потому что всякий правильный многоугольник можно рассматривать как описанный около круга, у которого радиус есть апофема.*

253. Площадь неправильного многоугольника. Для нахождения площади какого-нибудь неправильного многоугольника можно его разбить на треугольники (например, диагоналями), вычислить площадь каждого треугольника в отдельности и результаты сложить.

254. Задача. *Построить треугольник, равновеликий данному многоугольнику* ($ABCDE$, рис. 253). Какой-нибудь диагональю



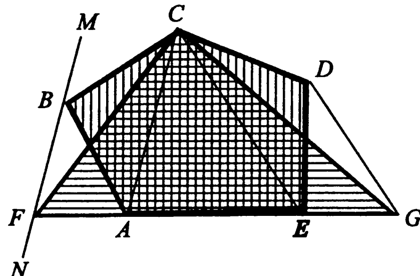




Рис. 252 Рис. 253

AC отсекаем от данного многоугольника $\triangle ABC$. Через ту вершину B этого треугольника, которая лежит против взятой диагонали, проводим прямую $MN \| AC$. Затем продолжим одну из сторон EA или DC, прилежащих к отсеченному треугольнику, до пересечения с прямой MN (на рисунке продолжена сторона EA). Точку пересечения F соединим прямой с C. Треугольники CBA и CFA равновелики,

так как у них общее основание AC, а вершины B и F лежат на прямой, параллельной основанию. Если от данного многоугольника отделим $\triangle CBA$ и вместо него приложим равновеликий ему $\triangle CFA$, то величина площади не изменится; следовательно, данный многоугольник равновелик многоугольнику $FCDE$, у которого, очевидно, число углов на единицу меньше, чем у данного многоугольника. Таким же приемом можно число углов полученного многоугольника уменьшить еще на единицу и продолжать такое последовательное уменьшение до тех пор, пока не получится треугольник (FCO на нашем рисунке).

255. Задача. *Построить квадрат, равновеликий данному многоугольнику.*

Сначала преобразовывают многоугольник в равновеликий треугольник, а затем этот треугольник — в квадрат. Пусть основание и высота треугольника b и h, а сторона искомого квадрата x. Тогда площадь первого равна $\frac{1}{2}bh$, а второго x^2; следовательно,

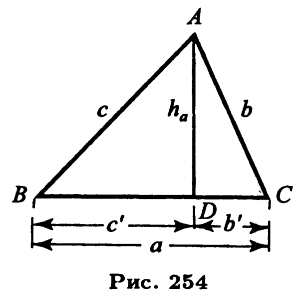


Рис. 254

$$\frac{1}{2}bh = x^2, \quad \text{откуда} \quad \frac{1}{2}b : x = x : h,$$

т.е. x есть средняя пропорциональная между $\frac{1}{2}b$ и h. Значит, сторону квадрата можно построить способом, указанным раньше (§ 190) для нахождения средней пропорциональной.

Замечание. Преобразование данного многоугольника в треугольник не всегда необходимо. Например, если речь идет о преобразовании в квадрат данной трапеции, то достаточно найти среднюю пропорциональную между высотой трапеции и ее средней линией и на полученном отрезке построить квадрат.

256. Задача. *Вычислить площадь S треугольника, зная длины a, b и c его сторон.*

Пусть высота $\triangle ABC$ (рис. 254), опущенная на сторону a, есть h_a. Тогда

$$S = \frac{1}{2}ah_a.$$

Чтобы найти высоту h_a, возьмем равенство (§ 194):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac'$$

и определим из него отрезок c':

$$c' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}.$$

Из $\triangle ABD$ находим:

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}.$$

Преобразуем подкоренное выражение так:

$$\begin{aligned}(2ac)^2 - (a^2+c^2-b^2)^2 &= (2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2) = \\ &= [(a^2+c^2+2ac)-b^2][b^2-(a^2+c^2-2ac)] = \\ &= [(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2] = \\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}^{*)}.$$

Если положим, что $a+b+c=2p$, то

$$a+c-b = (a+b+c)-2b = 2p-2b = 2(p-b).$$

Подобно этому

$$b+a-c = 2(p-c);$$
$$b+c-a = 2(p-a).$$

Тогда

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)},$$

т. е.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Это выражение известно под названием **формулы Герона** (по имени математика Герона из Александрии, жившего приблизительно в III–II в. до н. э.).

Частный случай. Площадь равностороннего треугольника со стороной a выражается следующей формулой:

$$S = \sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

---

*) Так как в треугольнике сумма любых двух сторон больше третьей, то все разности $a+b-c$, $a+c-b$ и $b+c-a$ — числа положительные.

Теорема Пифагора и основанные на ней задачи

257. Теорема. ***Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе этого треугольника.***

Это предложение является другой формой теоремы Пифагора, доказанной ранее (§ 191): квадрат числа, измеряющего длину гипотенузы, равен сумме квадратов чисел, измеряющих длины катетов. Действительно, квадрат числа, измеряющего длину отрезка, и является мерой площади квадрата, построенного на этом отрезке. Поэтому теорема § 191 равносильна указанной теореме Пифагора.

Приведем другое доказательство теоремы Пифагора, основанное не на вычислении площадей, а на непосредственном их сравнении между собой.

Доказательство (Евклида). Пусть ABC (рис. 255) — прямоугольный треугольник, а $BDEA$, $AFGC$ и $BCKH$ — квадраты, построенные на его катетах и гипотенузе; требуется доказать, что сумма площадей двух первых квадратов равна площади третьего квадрата.

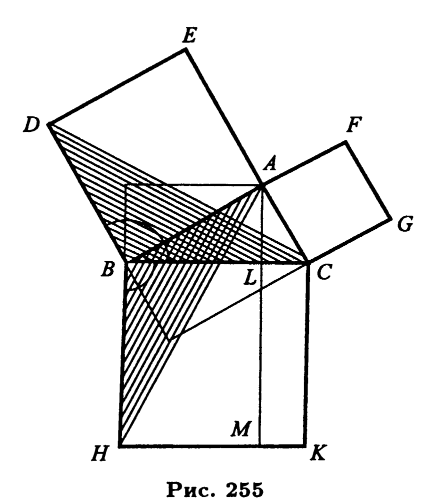


Рис. 255

Проведем $AM \perp BC$. Тогда квадрат $BCKH$ разделится на два прямоугольника. Докажем, что прямоугольник $BLMH$ равновелик квадрату $BDEA$, а прямоугольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$.

Проведем вспомогательные прямые DC и AH. Рассмотрим два треугольника, покрытые на рисунке штрихами. $\triangle DCB$, имеющий основание BD, общее с квадратом $BDEA$, а высоту CN, равную высоте AB этого квадрата, равновелик половине квадрата. $\triangle ABH$, имеющий основание BH, общее с прямоугольником $BLMH$, и высоту AP, равную высоте BL этого прямоугольника, равновелик половине его. Сравнивая эти два треугольника между собой, находим, что у них $BD = BA$ и $BC = BH$ (как стороны квадрата); сверх того $\angle DBC = \angle ABH$, так как каждый из этих углов состоит из общей части ABC и прямого угла. Значит, треугольники ABH и BDC равны. Отсюда следует, что прямоугольник $BLMH$ рав-

новелик квадрату $BDEA$. Соединив G с B и A с k, мы совершенно так же докажем, что прямоугольник $LCKM$ равновелик квадрату $AFGC$. Отсюда следует, что квадрат $BCKH$ равновелик сумме квадратов $BDEA$ и $AFGC$.

258. Задачи. 1) *Построить квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов.*

Строим прямоугольный треугольник, у которого катетами были бы стороны данных квадратов. Квадрат, построенный на гипотенузе этого треугольника, имеет площадь, равную сумме площадей данных квадратов.

2) *Построить квадрат, площадь которого равна разности площадей двух данных квадратов.*

Строим прямоугольный треугольник, у которого гипотенузой была бы сторона большего из данных квадратов, а катетом — сторона меньшего квадрата. Квадрат, построенный на другом катете этого треугольника, является искомым.

3) *Построить квадрат, площадь которого относится к площади данного квадрата как $m : n$.*

На произвольной прямой (рис. 256) откладываем $AB = m$ и $BC = n$, и на AC как на диаметре описываем полуокружность. Из точки B восставляем перпендикуляр BD до пересечения с окружностью. Проведя хорды AD и DC, получим прямоугольный треугольник, у которого (§ 192)

$$AD^2 : DC^2 = AB : BC = m : n.$$

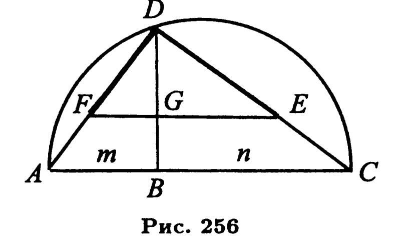


Рис. 256

На катете DC этого треугольника отложим отрезок DE, равный стороне данного квадрата, и проведем $EF \| CA$*). Отрезок DF есть сторона искомого квадрата, потому что

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AD}{DC}, \quad \text{откуда} \quad \left(\frac{DF}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AD}{DC}\right)^2;$$

следовательно,

$$DF^2 : DE^2 = AD^2 : DC^2 = m : n.$$

---

*) Если сторона данного квадрата больше DC, то точки E и F будут лежать на продолжениях катетов DC и DA.

Отношение площадей подобных фигур

259. Теорема. ***Площади двух треугольников, имеющих по равному углу, относятся как произведения сторон, заключающих эти углы.***

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 257) углы A и A_1 равны.

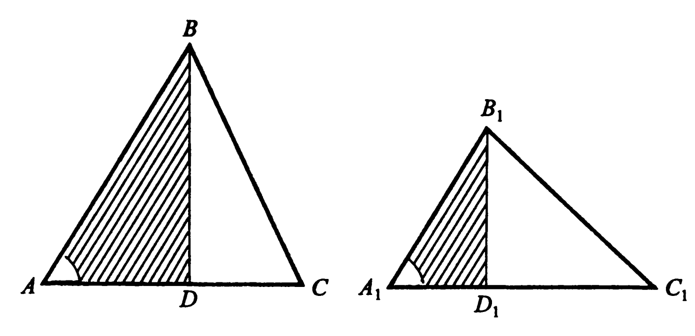


Рис. 257

Проведя высоты BD и B_1D_1, будем иметь:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \frac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{BD}{B_1D_1}.$$

Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ подобны ($\angle A = \angle A_1$ и $\angle D = \angle D_1$), поэтому отношение $BD : B_1D_1$ равно отношению $AB : A_1B_1$; заменив первое отношение вторым, получим:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \cdot \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC \cdot AB}{A_1C_1 \cdot A_1B_1}.$$

260. Теорема. ***Площади подобных треугольников или многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.***

1) Если ABC и $A_1B_1C_1$ — два подобных треугольника, то углы одного равны соответственно углам другого; пусть $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ и $\angle C = \angle C_1$. Применим к ним предыдущую теорему:

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

Но из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}. \qquad (2)$$

Поэтому в равенстве (1) мы можем каждое из отношений $\frac{AB}{A_1B_1}$ и $\frac{AC}{A_1C_1}$ заменить любым отношением ряда (2); следовательно,

$$\frac{\text{площадь } ABC}{\text{площадь } A_1B_1C_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{AC}{A_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \\ = \frac{AB^2}{A_1B_1^2} = \frac{AC^2}{A_1C_1^2} = \frac{BC^2}{B_1C_1^2}.$$

2) Если $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 258) — два подобных многоугольника, то их можно, как мы видели (§ 171), разложить на одинаковое число подобных и одинаково расположенных треугольников.

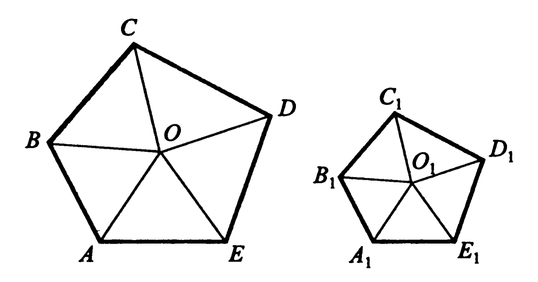


Рис. 258

Пусть эти треугольники будут: AOB и $A_1O_1B_1$, BOC и $B_1O_1C_1$ и т. д. Согласно доказанному в первой части этой теоремы, мы получим пропорции:

$$\frac{\text{площадь } AOB}{\text{площадь } A_1O_1B_1} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2; \frac{\text{площадь } BOC}{\text{площадь } B_1O_1C_1} = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 \text{ и т. д.}$$

Но из подобия многоугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \ldots,$$

и потому

$$\left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = \left(\frac{BC}{B_1C_1}\right)^2 = \left(\frac{CD}{C_1D_1}\right)^2 = \ldots.$$

Значит,

$$\frac{\text{площадь } AOB}{\text{площадь } A_1O_1B_1} = \frac{\text{площадь } BOC}{\text{площадь } B_1O_1C_1} = \frac{\text{площадь } COD}{\text{площадь } C_1O_1D_1} = \ldots,$$

откуда

$$\frac{\text{площадь } AOB + \text{площадь } BOC + \text{площадь } COD}{\text{площадь } A_1O_1B_1 + \text{площадь } B_1O_1C_1 + \text{площадь } C_1O_1D_1} =$$

$$= \frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } A_1B_1C_1D_1E_1} = \frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

С л е д с т в и е. *Площади правильных одноименных многоугольников относятся как квадраты сторон, или квадраты радиусов описанных окружностей, или квадраты апофем.*

261. З а д а ч а. *Разделить данный треугольник на m равновеликих частей прямыми, параллельными его стороне.*

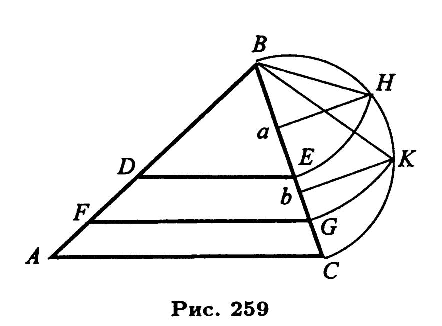


Рис. 259

Пусть, например, требуется разделить $\triangle ABC$ (рис. 259) на три равновеликие части отрезками, параллельными основанию AC.

Предположим, что искомые отрезки будут DE и FG. Очевидно, что если мы найдем отрезки BE и BG, то определятся и отрезки DE и FG. Треугольники BDE, BFG и BAC подобны; поэтому

$$\frac{\text{площадь } BDE}{\text{площадь } BAC} = \frac{BE^2}{BC^2} \quad \text{и} \quad \frac{\text{площадь } BFG}{\text{площадь } BAC} = \frac{BG^2}{BC^2}.$$

Но

$$\frac{\text{площадь } BDE}{\text{площадь } BAC} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{\text{площадь } BFG}{\text{площадь } BAC} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{BE^2}{BC^2} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{BG^2}{BC^2} = \frac{2}{3},$$

откуда

$$BE = \sqrt{\frac{1}{3}BC^2} = \sqrt{\frac{1}{3}BC \cdot BC}$$

и

$$BG = \sqrt{\frac{2}{3}BC^2} = \sqrt{\frac{2}{3}BC \cdot BC}.$$

Из этих выражений видим, что BE есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{1}{3}BC$, а BG есть средняя пропорциональная между BC и $\frac{2}{3}BC$. Поэтому построение можно выполнить так: разделим BC на три равные части в точках a и b; опишем на BC полуокружность; из a и b восставим к BC перпендикуляры aH и bK. Хорды HB и KB будут искомыми средними пропорциональными; первая — между всем

диаметром BC и его третьей частью Ba, вторая — между BC и Bb, т. е. между BC и $2/3BC$. Остается отложить эти хорды на BC от точки B, тогда получим искомые точки E и G. Подобным образом можно разделить треугольник на какое угодно число равновеликих частей.

2. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ

262. Лемма. ***При неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его может сделаться как угодно малой.***

Пусть n есть число сторон правильного вписанного многоугольника и p — его периметр; тогда длина одной стороны этого многоугольника выразится дробью $\frac{p}{n}$. При неограниченном удвоении числа сторон многоугольника знаменатель этой дроби будет, очевидно, возрастать неограниченно, а числитель, т. е. p, хотя и будет возрастать, но не беспредельно (так как периметр всякого вписанного выпуклого многоугольника всегда остается меньшим периметра любого описанного многоугольника). Если же в какой-нибудь дроби знаменатель неограниченно возрастает, а числитель остается меньше некоторой постоянной величины, то дробь эта может сделаться как угодно малой. Значит, то же самое можно сказать о стороне правильного вписанного многоугольника: при неограниченном удвоении числа сторон она может сделаться как угодно малой.

263. Следствие. Пусть AB (рис. 260) есть сторона правильного вписанного многоугольника, OA — радиус и OC — апофема. Из $\triangle OAC$ находим (§ 50):

$$OA - OC < AC,$$

т. е.

$$AO - OC < \frac{1}{2}AB.$$

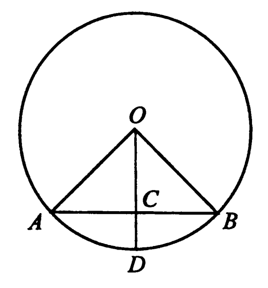


Рис. 260

Но при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника сторона его, как мы сейчас доказали, может сделаться как угодно малой; значит, то же самое можно сказать и о разности $OA - OC$. Таким образом, при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника *разность между радиусом и апофемой может сделаться как угодно малой.* Это же можно высказать другими словами так: при неограниченном удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника *предел, к которому стремится апофема, есть радиус.*

264. Площадь круга. Впишем в круг, радиус которого обозначим R, какой-нибудь правильный многоугольник. Пусть

площадь	этого	многоугольника	будет	q,
периметр	"	"	"	p,
апофема	"	"	"	a.

Мы видели (§ 252, следствие), что между этими величинами есть такая зависимость:

$$q = \frac{1}{2}p \cdot a.$$

Вообразим теперь, что число сторон этого многоугольника неограниченно удваивается. Тогда периметр p и апофема a (следовательно, и площадь q) будут увеличиваться, причем периметр будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности, апофема будет стремиться к пределу, равному радиусу R круга. Из этого следует, что площадь многоугольника, увеличиваясь при удвоении числа сторон, будет стремиться к пределу, равному $\frac{1}{2}C \cdot R$. Предел этот принимается за численную величину площади круга. Таким образом, обозначив площадь круга буквой k, можем написать:

$$K = \frac{1}{2}C \cdot R,$$

т. е. *площадь круга равна половине произведения длины окружности на радиус.*

Так как $C = 2\pi R$, то

$$K = \frac{1}{2}2\pi R \cdot R = \pi R^2,$$

т. е. *площадь круга равна квадрату радиуса, умноженному на отношение длины окружности к диаметру.*

265. Следствие. *Площади кругов относятся, как квадраты радиусов или диаметров.*

Действительно, если K и K_1 будут площади двух кругов, а R и R_1 — их радиусы, то

$$K = \pi R^2$$

и

$$K_1 = \pi R_1^2,$$

откуда

$$\frac{K}{K_1} = \frac{\pi R^2}{\pi R_1^2} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{4R^2}{R_1^2} = \frac{(2R)^2}{(2R_1)^2}.$$

266. Задача 1. *Вычислить площадь круга, длина окружности которого равна* 2 м.

Для этого предварительно находим радиус R из равенства:

$$2\pi R = 2,$$

откуда

$$R = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183\ldots.$$

Затем определим площадь круга;

$$K = \pi R^2 = \pi\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi} = 0,3183\ldots\text{м}^2.$$

267. Задача 2. *Построить квадрат, равновеликий данному кругу.*

Эта задача, известная под названием квадратуры круга, не может быть решена при помощи циркуля и линейки. Действительно, если обозначим буквой x сторону искомого квадрата, а буквой R радиус круга, то получим уравнение:

$$x^2 = \pi R^2,$$

откуда

$$\pi R : x = x : R,$$

т. е. x есть средняя пропорциональная между полуокружностью и радиусом. Следовательно, если известен отрезок, длина которого равна длине полуокружности, то легко построить квадрат, равновеликий данному кругу, и обратно, если известна сторона квадрата, равновеликого кругу, то можно построить отрезок, равный по длине полуокружности. Но с помощью циркуля и линейки нельзя построить отрезок, длина которого равнялась бы длине полуокружности; следовательно, нельзя в точности решить задачу о построении квадрата, равновеликого кругу. Приближенное решение можно выполнить, если предварительно найти приближенную длину полуокружности и затем построить среднюю пропорциональную между отрезком этой длины и радиусом.

268. Теорема. ***Площадь сектора равна произведению длины его дуги на половину радиуса.***

Пусть дуга AB (рис. 261) сектора AOB содержит $n°$. Очевидно, что площадь сектора, дуга которого содержит $1°$, составляет $1/360$

часть площади круга, т. е. она равна $\frac{\pi R^2}{180}$. Следовательно, площадь S сектора, дуга которого содержит $n°$, равна:

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{\pi R n}{180} \cdot \frac{R}{2}.$$

Так как дробь $\frac{\pi R n}{180}$ выражает длину дуги AB (§ 239), то, обозначив ее буквой s, получим:

$$S = s \cdot \frac{R}{2}.$$

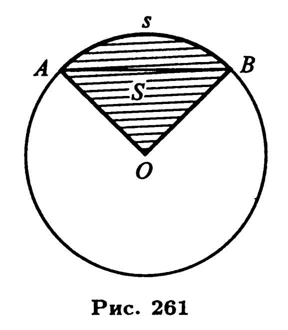


Рис. 261

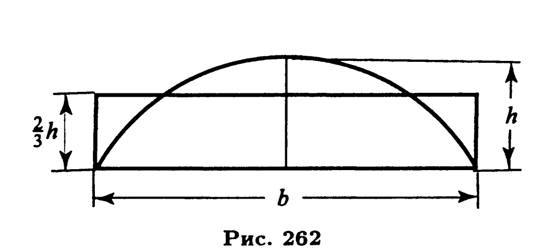


Рис. 262

269. Площадь сегмента. Для нахождения площади сегмента, ограниченного дугой s и хордой AB (рис. 261), надо отдельно вычислить площадь сектора $AOBsA$ и площадь треугольника AOB и из первой вычесть вторую.

Впрочем, когда градусное измерение дуги s невелико, площадь сегмента можно вычислять по следующей приближенной формуле (мы ее приводим без доказательства):

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3}\,bh, \qquad (1)$$

где b есть основание сегмента (рис. 262), а h — его высота (обыкновенно называемая стрелкой сегмента). Доказано, что погрешность результата вычисления, получаемого по этой приближенной формуле, тем меньше, чем меньше отношение $h : b$; так, если h меньше $1/9\,b$ (что бывает тогда, когда дуга s содержит меньше $50°$), то погрешность оказывается меньше 1% площади.

Более точные результаты дает более сложная формула:

$$\text{площадь сегмента} = \frac{2}{3}bh + \frac{h^2}{2b}. \qquad (2)$$

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать теоремы

1. В параллелограмме расстояния любой точки диагонали от двух прилежащих сторон обратно пропорциональны этим сторонам.

2. Площадь трапеции равна произведению одной из непараллельных сторон на перпендикуляр, опущенный из середины другой непараллельной стороны на первую.

3. Два четырехугольника равновелики, если у них равны соответственно диагонали и угол между ними.

4. Если площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции и образуемых пересечением ее диагоналей, равны соответственно p^2 и q^2, то площадь всей трапеции равна $(p+q)^2$.

5. Площадь правильного вписанного шестиугольника равна $3/4$ площади правильного описанного шестиугольника.

6. В четырехугольнике $ABCD$ через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная другой диагонали AC. Эта прямая пересекает сторону AD в точке E. Доказать, что отрезок CE делит четырехугольник пополам.

7. Если медианы треугольника взять за стороны другого треугольника, то площадь последнего равна площади первого.

8. В круге с центром O проведена хорда AB. На радиусе OA, как на диаметре, описана окружность. Доказать, что площади двух сегментов, отсекаемых хордой AB от обоих кругов, относятся, как 4:1.

Задачи на вычисление

9. Вычислить площадь прямоугольной трапеции, у которой один из углов равен $60°$, зная или оба основания, или одно основание и высоту, или одно основание и боковую сторону, наклонную к основанию.

10. Даны основания трапеции B и b и ее высота H. Вычислить высоту треугольника, образованного продолжением непараллельных сторон трапеции до взаимного пересечения.

11. В треугольник вписан другой треугольник, вершины которого делят пополам стороны первого треугольника; в другой треугольник вписан подобным же образом третий; в третий — четвертый и т. д. неограниченно. Найти предел суммы площадей этих треугольников.

12. По трем данным сторонам a, b и c треугольника вычислить радиус r круга, вписанного в этот треугольник.

Указание. Если S есть площадь треугольника, то легко усмотреть, что

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = pr,$$

где p означает полупериметр треугольника. С другой стороны, площадь S выражается формулой, выведенной в § 256. Отсюда можно получить формулу для r.

13. Вычислить стрелку (высоту) и площадь сегмента в зависимости от радиуса r круга, если центральный угол, соответствующий сегменту, содержит 60° . Вычисление это произвести тремя способами: 1) посредством вычитания из площади сектора площади треугольника; 2) по первой сокращенной формуле, указанной в § 269; 3) по второй сокращенной формуле, указанной там же. Сравните результаты вычисления друг с другом с целью определить абсолютную и относительную погрешности приближенных результатов.

Решение:

$$b = r;$$

$$h = r - \frac{1}{2}r\sqrt{3} = \frac{1}{2}r(2-\sqrt{3}) = 0{,}1340r;$$

1) площадь $p_1 = \dfrac{\pi r^2}{6} - \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = 0{,}0906r^2;$

2) площадь $p_2 = \dfrac{2}{3}bh = \dfrac{2}{3}\cdot r\cdot 0{,}1340r = 0{,}0893r^2;$

3) площадь $p_3\dfrac{2}{3}bh + \dfrac{h^3}{2b} = 0{,}0893r^2 + 0{,}0012r^2 = 0{,}0905r^2.$

Абсолютная погрешность:

$$\text{для площади } p_2 = 0{,}0906r^2 - 0{,}0893r^2 = 0{,}0013r^2;$$
$$\text{для площади } p_3 = 0{,}0906r^2 - 0.0905r^2 = 0{,}0001r^2.$$

Относительная погрешность (т.е. отношение абсолютной погрешности к измеряемой величине):

$$\text{для площади } p_2 = \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{0{,}0013r^2}{0{,}0906r^2} = 0{,}014 = 1{,}4\%;$$
$$\text{для площади } p_2 = \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \frac{0{,}0001r^2}{0{,}0906r^2} = 0{,}001 = 0{,}1\%.$$

Таким образом, результат, вычисленный по первой приближенной формуле, меньше истинного результата (приблизительно) на 1,4%, а результат, вычисленный по второй приближенной формуле, меньше истинного на 0,1%.

14. 1) Зная основание b сегмента и высоту его (стрелку) h, вычислить радиус r круга.

Указание. Из прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза есть r, один катет $\dfrac{b}{2}$, а другой $r - h$, находим уравнение:

$$\left(\frac{b}{2}\right) + (r-h)^2 = r^2,$$

из которого легко определить r.

2) Вычислить диаметр круга, если известно, что при основании сегмента, равном 67,2 см, стрелка его есть 12,8 см (см. предыдущее указание).

Задачи на построение

15. Разделить треугольники прямыми, проходящими через его вершину, на три части, площади которых относятся, как $m : n : p$.

16. Разделить треугольник на две равновеликие части прямой, проходящей через данную точку его стороны.

17. Найти внутри треугольника такую точку, чтобы прямые, соединяющие ее с вершинами треугольника, делили его на три равновеликие части.

Указание. Разделим сторону AC на 3 равные части в точках D и E. Через D проводим прямую, параллельную AB, и через E — прямую, параллельную BC. Точка пересечения этих прямых — искомая.

18. То же — на три части в отношении 2:3:4 (или вообще $m : n : p$).

19. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, исходящими из вершины его.

20. Разделить параллелограмм на две части прямой, проходящей через данную точку, так, чтобы их площади относились, как $m : n$.

Указание. Среднюю линию параллелограмма разделить в отношении $m : n$ и точку деления соединить прямой с данной точкой.

21. Разделить параллелограмм на три равновеликие части прямыми, параллельными диагонали.

22. Разделить площадь треугольника в среднем и крайнем отношении прямой, параллельной основанию.

Указание. Решается приложением алгебры к геометрии.

23. Разделить треугольник на три равновеликие части прямыми, перпендикулярными к основанию.

24. Разделить круг на 2, на 3, ... равновеликие части концентрическими окружностями.

25. Разделить трапецию на две равновеликие части прямой, параллельной основаниям.

Указание. Продолжив непараллельные стороны до взаимного пересечения, взять за неизвестную величину расстояние конца искомой линии до вершины треугольника; составить пропорции, исходя из площадей подобных треугольников.

26. Данный треугольник преобразовать в другой равновеликий прямоугольник с данным основанием.

27. Построить квадрат, равновеликий $2/3$ данного квадрата.

28. Преобразовать квадрат в равновеликий прямоугольник, у которого сумма или разность d двух смежных сторон дана.

29. Построить круг, равновеликий кольцу, заключенному между двумя данными концентрическими окружностями.

30. Построить треугольник, подобный одному и равновеликий другому из двух данных треугольников.

31. Данный треугольник преобразовать в равновеликий равносторонний (посредством приложения алгебры к геометрии).

32. В данный круг вписать прямоугольник с данной площадью m^2 (посредством приложения алгебры к геометрии).

33. В данный треугольник вписать прямоугольник с данной площадью m (приложением алгебры к геометрии; исследовать).

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Предварительные замечания

1. В стереометрии изучаются геометрические тела и пространственные фигуры, не все точки которых лежат в одной плоскости. Пространственные фигуры изображаются на плоскости по определенным правилам, основанным на геометрических свойствах, которые производят на глаз приблизительно такое же впечатление, как и сама фигура.

Один из способов изображения пространственных фигур на плоскости будет указан в дальнейшем (§§ 54–66).

Глава I

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

2. Изображение плоскости. В обыденной жизни многие предметы, поверхность которых напоминает геометрическую плоскость, имеют форму прямоугольника: переплет книги, оконное стекло, поверхность письменного стола и т. п. При этом если смотреть на эти предметы под углом и с большего расстояния, то они представляются нам имеющими форму параллелограмма. Поэтому принято изображать плоскость на рисунке в виде параллелограмма*) . Эту плоскость обычно обозначают одной буквой, например «плоскость M» (рис. 1).

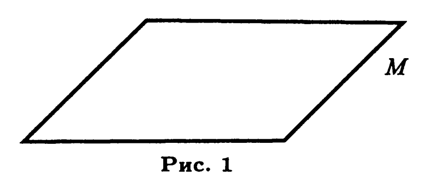


Рис. 1

3. Основные свойства плоскости. Укажем следующие свойства плоскости, которые принимаются без доказательства, т. е. являются аксиомами:

*) Наряду с указанным изображением плоскости возможно и такое, как на рис. 15–17 и др. (Прим. ред.)

1) *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит плоскости.*

2) *Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.*

3) *Через всякие три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.*

4. Следствия. Из последнего предложения можно вывести следствия:

1) *Через прямую и точку вне ее можно провести плоскость* (*и только одну*). Действительно, точка вне прямой вместе с какими-нибудь двумя точками этой прямой составляют три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

2) *Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость* (*и только одну*). Действительно, взяв точку пересечения и еще по одной точке на каждой прямой, мы будем иметь три точки, через которые можно провести плоскость (и притом одну).

3) *Через две параллельные прямые можно провести только одну плоскость.* Действительно, параллельные прямые, по определению, лежат в одной плоскости; эта плоскость единственная, так как через одну из параллельных и какую-нибудь точку другой можно провести не более одной плоскости.

5. Вращение плоскости вокруг прямой. ***Через каждую прямую в пространстве можно провести бесчисленное множество плоскостей.***

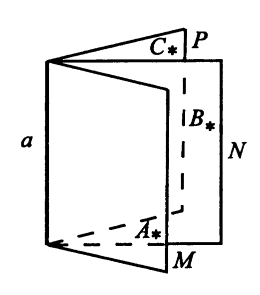


Рис. 2

В самом деле, пусть дана прямая a (рис. 2). Возьмем какую-нибудь точку A вне ее. Через точку A и прямую a проходит единственная плоскость (§ 4). Назовем ее плоскостью M. Возьмем новую точку B вне плоскости M. Через точку B и прямую a в свою очередь проходит плоскость. Назовем ее плоскостью N. Она не может совпадать с M, так как в ней лежит точка B, которая не принадлежит плоскости M. Мы можем далее взять в пространстве еще новую точку C вне плоскостей M и N. Через точку C и прямую a проходит новая плоскость. Назовем ее P. Она не совпадает ни с M, ни с N, так как в ней находится точка C, не принадлежащая ни плоскости M, ни плоскости N. Продолжая брать в пространстве все новые и новые точки, мы будем таким путем получать все новые и новые плоскости, проходящие через данную прямую a. Таких плоскостей будет **бесчисленное множество**. Все эти плоскости можно рассматривать как различные положения одной и той же плоскости, которая **вращается** вокруг прямой a.

Мы можем, следовательно, высказать еще одно свойство плоскости: плоскость может вращаться вокруг всякой прямой, лежащей в этой плоскости.

6. Задачи на построение в пространстве. Все построения, которые делались в планиметрии, выполнялись в одной плоскости при помощи чертежных инструментов. Для построений в пространстве чертежные инструменты становятся уже непригодными, так как чертить фигуры в пространстве невозможно. Кроме того, при построениях в пространстве появляется еще новый элемент — **плоскость**, построение которой в пространстве нельзя выполнять столь простыми средствами, как построение прямой на плоскости.

Поэтому при построениях в пространстве необходимо точно определить, что значит выполнить то или иное построение и, в частности, что значит построить плоскость в пространстве. Во всех построениях в пространстве мы будем предполагать, что:

1) плоскость может быть построена, если найдены элементы, определяющие ее положение в пространстве (§ 3 и 4), т. е. что мы умеем построить плоскость, проходящую через три данные точки, через прямую и точку вне ее, через две пересекающиеся или две параллельные прямые;

2) если даны две пересекающиеся плоскости, то дана и линия их пересечения, т. е. мы умеем найти линию пересечения двух плоскостей;

3) если в пространстве дана плоскость, то мы можем выполнять в ней все построения, которые выполнялись в планиметрии.

Выполнить какое-либо построение в пространстве — это значит свести его к конечному числу только что указанных основных построений. При помощи этих основных задач можно решать и задачи более сложные.

В этих предложениях и решаются задачи на построение в стереометрии.

7. Пример задачи на построение в пространстве.

Задача. *Найти точку пересечения данной прямой a* (рис. 3) *с данной плоскостью P.*

Возьмем на плоскости P какую-либо точку A. Через точку A и прямую a проводим плоскость Q. Она пересекает плоскость P по некоторой прямой b. В плоскости Q находим точку C пересечения прямых a и b. Эта точка и будет искомой. Если прямые a и b окажутся параллельными, то задача не будет иметь решения.

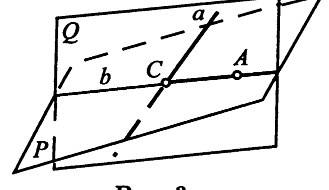


Рис. 3

2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

Параллельные прямые

8. Предварительное замечание. Две прямые могут быть расположены в пространстве так, что через них нельзя провести плоскость. Возьмем, например (рис. 4), две такие прямые AB и DE, из ко-

торых одна пересекает некоторую плоскость P, а другая лежит на ней, но не проходит через точку (C) пересечения первой прямой и плоскости P. Через такие две прямые нельзя провести плоскость, потому что в противном случае через прямую DE и точку C проходили бы две различные плоскости: одна P, пересекающая прямую AB, и другая, содержащая ее, а это невозможно (§ 3).

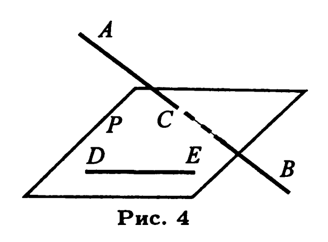


Рис. 4

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, конечно, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; однако их не называют параллельными, оставляя это название для таких прямых, которые, находясь в одной плоскости, не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются **скрещивающимися**.

Прямая и плоскость, параллельные между собой

9. Определение. Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, называются **параллельными**, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

10. Теорема. ***Если прямая*** (AB, рис. 5) ***параллельна какой-нибудь прямой*** (CD), ***расположенной в плоскости*** (P), ***то она параллельна самой плоскости.***

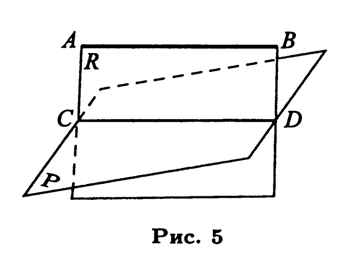


Рис. 5

Проведем через AB и CD плоскость R и предположим, что прямая AB где-нибудь пересекается с плоскостью P. Тогда точка пересечения, находясь на прямой AB, должна принадлежать также и плоскости R, на которой лежит прямая AB, в то же время точка пересечения, конечно, должна принадлежать и плоскости P. Значит, точка пересечения, находясь одновременно и на плоскости R, и на плоскости P, должна лежать на прямой CD, по которой пересекаются эти плоскости; следовательно, прямая AB пересекается с прямой CD. Но это невозможно, так как по условию $AB \| CD$. Значит, нельзя допустить, чтобы прямая AB пересекалась с плоскостью P, и потому $AB \| P$.

11. Теорема. ***Если плоскость*** (R, рис. 5) ***проходит через прямую*** (AB), ***параллельную другой плоскости*** (P), ***и пересекает эту плоскость, то линия пересечения*** (CD) ***параллельна первой прямой*** (AB).

Действительно, во-первых, прямая CD лежит в одной плоскости с прямой AB, во-вторых, эта прямая не может пересечься с прямой AB, потому что в противном случае прямая AB пересекалась бы с плоскостью P, что невозможно.

12. Следствие 1. *Если прямая* (AB, рис. 6) *параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей* (P и Q), *то она параллельна линии их пересечения* (CD).

Проведем плоскость через AB и какую-нибудь точку M прямой CD. Эта плоскость должна пересечься с плоскостями P и Q по прямым, параллельным AB и проходящим через точку M. Но через точку M можно провести только одну прямую, параллельную AB; значит, две линии пересечения проведенной плоскости с плоскостями P и Q должны слиться в одну прямую. Эта прямая, находясь одновременно на плоскости P и на плоскости Q, должна совпадать с прямой CD, по которой плоскости P и Q пересекаются; значит, $CD \| AB$.

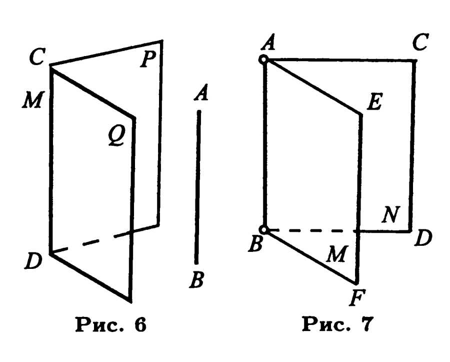


Рис. 6 Рис. 7

13. Следствие 2. *Если две прямые* (AB и CD, рис. 7) *параллельны третьей прямой* (EF), *то они параллельны между собой.*

Проведем плоскость M через параллельные прямые AB и EF. Так как $CD \| EF$, то $CD \| M$ (§ 10).

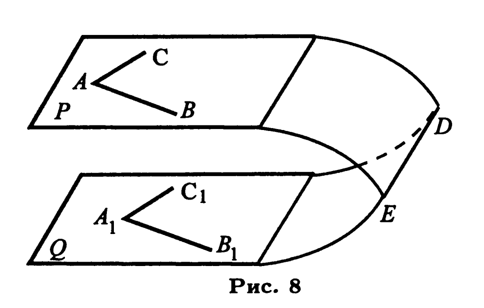


Рис. 8

Проведем также плоскость N через CD и некоторую точку A прямой AB. Так как $EF \| CD$, то $EF \| N$. Значит, плоскость N должна пересечься с плоскостью M по прямой, параллельной EF (§ 11) и в то же время проходящей через точку A. Но в плоскости M через A проходит единственная прямая, параллельная EF, именно прямая AB. Следовательно, плоскость N пересекается с M по прямой AB, значит, $CD \| AB$.

Параллельные плоскости

14. Определение. Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали.

15. Теорема. ***Если две пересекающиеся прямые*** (AB и AC, рис. 8) ***одной плоскости*** (P) ***соответственно параллельны двум прямым*** (A_1B_1 и A_1C_1) ***другой плоскости*** (Q), ***то эти плоскости параллельны.***

Прямые AB и AC параллельны плоскости Q (§ 10).

Допустим, что плоскости P и Q пересекаются по некоторой прямой DE (рис. 8). В таком случае $AB \| DE$ и $AC \| DE$ (§ 11).

Таким образом, в плоскости P через точку A проходят две прямые AB и AC, параллельные прямой DE, что невозможно. Значит, плоскости P и Q не пересекаются.

16. Теорема. ***Если две параллельные плоскости*** (P и Q, рис. 9) ***пересекаются третьей плоскостью*** (R), ***то линии пересечения*** (AB и CD) ***параллельны.***

Действительно, во-первых, прямые AB и CD находятся в одной плоскости (R); во-вторых, они не могут пересечься, так как в противном случае пересекались бы плоскости P и Q, что противоречит условию.

17. Теорема. ***Отрезки параллельных прямых*** (AC и BD, рис. 9), ***заключенные между параллельными плоскостями*** (P и Q), ***равны.***

Через параллельные прямые AC и BD проведем плоскость R; она пересечет плоскости P и Q по параллельным прямым AB и CD; следовательно, фигура $ABDC$ есть параллелограмм, и потому $AC = BD$.

18. Теорема. ***Два угла*** (BAC и $B_1A_1C_1$, рис. 10) ***с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны и лежат в параллельных плоскостях*** (P и Q).

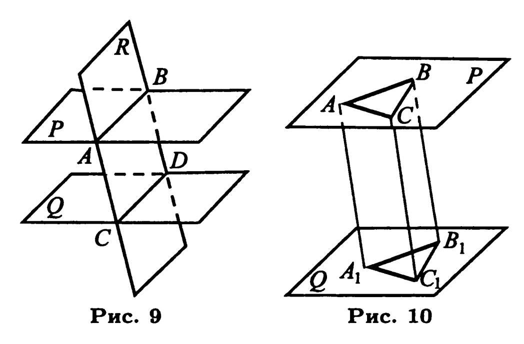


Рис. 9 Рис. 10

Что плоскости P и Q параллельны, было доказано выше § 15); остается доказать, что углы A и A_1 равны.

Отложим на сторонах углов произвольные, но равные отрезки $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и проведем прямые AA_l, BB_1, CC_1, BC и B_1C_1. Так как отрезки AB и A_1B_1 равны и параллельны, то фигура ABB_1A_1 есть параллелограмм; поэтому отрезки AA_1 и BB_1 равны и параллельны. По той же причине равны и параллельны отрезки AA_1 и CC_1; следовательно, $BB_1 \| CC_1$ и $BB_1 = CC_1$. Поэтому $BC = B_1C_1$ и $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по трем сторонам); значит, $\angle A = \angle A_1$.

Задачи на построение

19. *Через точку* (A, рис. 11), *расположенную вне данной прямой* (a), *в пространстве провести прямую, параллельную данной прямой* (a).

Решение. Через прямую a и точку A проводим плоскость M. В этой плоскости строим прямую b, параллельную прямой a.

Задача имеет единственное решение. В самом деле, искомая прямая должна лежать с прямой a в одной плоскости. В этой же плоскости должна находиться точка A, через которую проходит искомая прямая. Значит, эта плоскость должна совпадать с M. Но в плоскости M через точку A можно провести только одну прямую, параллельную прямой a.

20. *Через данную точку* (A, рис. 12) *провести плоскость, параллельную данной плоскости* (P), *не проходящей через точку* A.

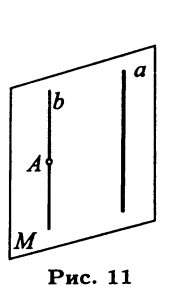


Рис. 11

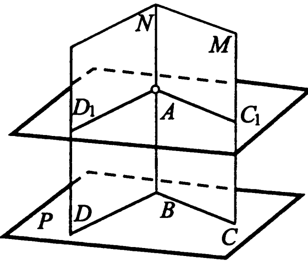


Рис. 12

Решение. Проводим на плоскости P через какую-либо точку B две какие-либо прямые BC и BD. Построим две вспомогательные плоскости: плоскость M — через точку A и прямую BC и плоскость N — через точку A и прямую BD. Искомая плоскость, параллельная плоскости P, должна пересечь плоскость M по прямой, параллельной BC, а плоскость N — по прямой, параллельной BD (§ 16). Отсюда вытекает такое построение: через точку A проводим в плоскости M прямую $AC_1 \| BC$, а в плоскости N прямую $AD_1 \| BD$.

Через прямые AC_1 и AD_1 проводим плоскость Q. Она и будет искомой. В самом деле, стороны угла D_1AC_1, расположенного в плоскости Q, параллельны сторонам угла DBC, расположенного в плоскости P. Следовательно, $Q \| P$.

Так как в плоскости M через точку A можно провести лишь одну прямую, параллельную BC, а в плоскости N через точку A лишь одну прямую, параллельную BD, то задача имеет единственное решение. Следовательно, через каждую точку пространства можно провести единственную плоскость, параллельную данной плоскости.

21. *Через данную прямую* (a, рис. 13) *провести плоскость, параллельную другой данной прямой* (b).

Решение. 1-й случай. Прямые a и b не параллельны. Через какую-нибудь точку A прямой a проводим прямую b_1, параллельную b; через прямые a и b_1 проводим плоскость. Она и будет искомой (§ 10). Задача имеет в этом случае единственное решение.

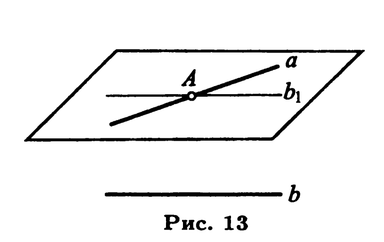


Рис. 13

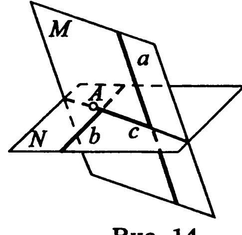


Рис. 14

2-й случай. Прямые a и b параллельны. В этом случае задача неопределенна: всякая плоскость, проходящая через прямую a, будет параллельна прямой b.

22. Пример более сложной задачи на построение. *Даны две скрещивающиеся прямые* (a и b, рис. 14) *и точка* A, *не лежащая ни на одной из данных прямых. Провести через точку* A *прямую, пересекающую обе данные прямые* (a и b).

Решение. Так как искомая прямая должна проходить через точку A и пересекать прямую a, то она должна лежать в плоскости, проходящей через прямую a и точку A (так как две ее точки должны лежать в этой плоскости: точка A и точка пересечения с прямой a). Совершенно так же убеждаемся, что искомая прямая должна лежать в плоскости, проходящей через точку A и прямую b. Следовательно, она должна служить линией пересечения этих двух плоскостей. Отсюда такое построение. Через точку A и прямую a проводим плоскость M; через точку A и прямую b проводим плоскость N. Берем прямую c пересечения плоскостей M и N. Если прямая c не параллельна ни одной из данных прямых, то она пересечется с каждой из данных прямых (так как с каждой из них она лежит в одной плоскости: a и c лежат в плоскости M, b и c — в плоскости N). Прямая c будет в этом случае искомой. Если же $a \| c$ или $b \| c$, то задача не имеет решения.

3. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ К ПЛОСКОСТИ

Поставим задачу определить, в каком случае прямая может считаться перпендикулярной к плоскости. Докажем предварительно следующее предложение:

23. Теорема. ***Если прямая*** (AA_1, рис. 15), ***пересекающаяся с плоскостью*** (MN), ***перпендикулярна к каким-нибудь двум прямым*** (OB и OC), ***проведенным на этой плоскости через точку пересечения*** (O) ***данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой*** (OD), ***проведенной на плоскости через ту же точку пересечения*** (O).

Отложим на прямой AA_1 произвольной длины, но равные отрезки OA и OA_1 и проведем на плоскости какую-нибудь прямую, кото-

рая пересекала бы три прямые, исходящие из точки O, в каких-нибудь точках C, D и B. Эти точки соединим с точками A и A_1. Мы получим тогда несколько треугольников. Рассмотрим их в такой последовательности.

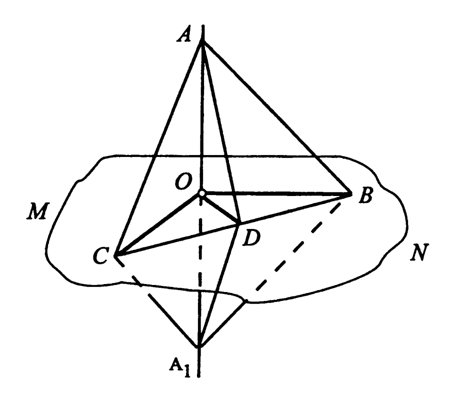


Рис. 15

Сначала возьмем треугольники ACB и A_1CB; они равны, так как у них CB — общая сторона, $AC = A_1C$ как наклонные к прямой AA_1, одинаково удаленные от основания O перпендикуляра OC; по той же причине $AB = A_1B$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABC = \angle A_1BC$.

После этого перейдем к треугольникам ADB и A_1DB; они равны, так как у них DB — общая сторона, $AB = A_1B$ и $\angle ABD = \angle A_1BD$. Из равенства этих треугольников выводим, что $AD = A_1D$.

Теперь возьмем треугольники AOD и A_1OD; они равны, так как имеют соответственно равные стороны. Из их равенства выводим, что $\angle AOD = \angle A_1OD$; а так как эти углы смежные, то, следовательно, $AA_1 \perp OD$.

24. Определение. Прямая называется ***перпендикулярной к плоскости***, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведенной на плоскости через точку пересечения. В этом случае говорят также, что плоскость перпендикулярна к прямой.

Из предыдущей теоремы (§ 23) следует, что прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум прямым, лежащим в данной плоскости и проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется ***наклонной*** к этой плоскости. Точка пересечения прямой с плоскостью называется ***основанием*** перпендикуляра или наклонной.

25. Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных*) Когда из одной точки A (рис. 16) проведены к плоскости перпендикуляр AB и наклонная AC, условимся называть ***проекцией*** наклонной на плоскость P отрезок BC, соединяющий основание перпендикуляра

---

*) Для краткости термины «перпендикуляр» и «наклонная» употребляются вместо «отрезок перпендикуляра, ограниченный данной точкой и основанием перпендикуляра», и «отрезок наклонной, ограниченный данной точкой и основанием наклонной».

и основание наклонной. Таким образом, отрезок BC есть проекция наклонной AC, отрезок BD есть проекция наклонной AD и т. д.

26. Теорема. ***Если из одной и той же точки*** (A, рис. 16), ***взятой вне плоскости*** (P), ***проведены к этой плоскости перпендикуляр*** (AB) ***и какие-нибудь наклонные*** (AC, AD, $AE, \ldots$), ***то:***

1) ***две наклонные, имеющие равные проекции, равны;***

2) ***из двух наклонных та больше, проекция которой больше.***

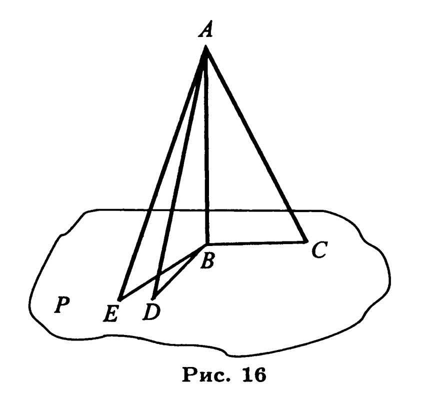


Рис. 16

Вращая прямоугольные треугольники ABC и ABD вокруг катета AB, мы можем совместить их плоскости с плоскостью $\triangle ABE$. Тогда все наклонные будут лежать в одной плоскости с перпендикуляром, а все проекции расположатся на одной прямой. Таким образом, доказываемые теоремы приводятся к аналогичным теоремам планиметрии.

Замечание. Так как AB есть катет прямоугольного треугольника, а каждая из наклонных $AC, AD, AE, \ldots$ есть гипотенуза, то перпендикуляр AB меньше всякой наклонной; значит, перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, есть наименьший из всех отрезков, соединяющих данную точку с любой точкой плоскости, и потому он принимается за меру расстояния точки A от плоскости P.

27. Обратные теоремы. ***Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то:*** 1) ***равные наклонные имеют равные проекции;*** 2) ***из двух проекций та больше, которая соответствует большей наклонной.***

Доказательство (от противного) предоставляем самим учащимся.

Приведем еще следующую теорему о перпендикулярах, которая понадобится нам впоследствии.

28. Теорема. ***Прямая*** (DE, рис. 17), ***проведенная на плоскости*** (P) ***через основание наклонной*** (AC) ***перпендикулярно к ее проекции*** (BC), ***перпендикулярна и к самой наклонной.***

Отложим произвольные, но равные отрезки CD и CE и соединим прямолинейными отрезками точки A и B с точками D и E. Тогда будем иметь: $BD = BE$ как наклонные к прямой DE, одинаково удаленные от основания C перпендикуляра BC; $AD = AE$ как наклонные к плоскости P, имеющие равные проекции BD и BE. Вследствие этого $\triangle ADE$ равнобедренный, и потому его медиана AC перпендикулярна к основанию DE.

Эта теорема носит название ***теоремы о трех перпендикулярах***. Действительно, в ней говорится о связи, соединяющей следующие три перпендикуляра: 1) AB к плоскости P, 2) BC к прямой DE и 3) AC к той же прямой DE.

29. Обратная теорема. ***Прямая*** (DE, рис. 17), ***проведенная на плоскости*** (P) ***через основание наклонной*** (AC) ***перпендикулярно к этой наклонной, перпендикулярна и к ее проекции.***

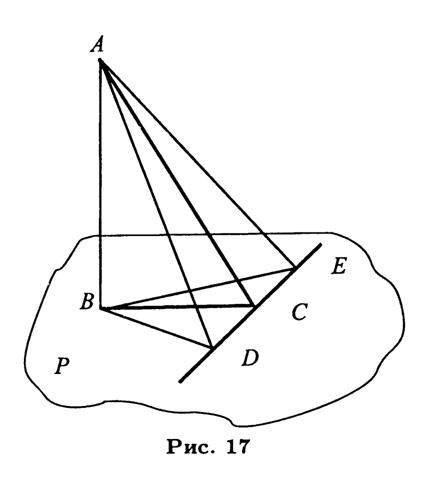


Рис. 17

Сделаем те же построения, что и при доказательстве прямой теоремы. Отложим произвольные, но равные отрезки CD и CE и соединим прямолинейными отрезками точки A и B с точками D и E, тогда будем иметь: $AD = AE$ как наклонные к прямой DE, одинаково удаленные от основания C перпендикуляра AC; $BD = BE$ как проекции равных наклонных AD и AE. Вследствие этого $\triangle BDE$ равнобедренный, и потому его медиана BC перпендикулярна к основанию DE.

4. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

30. Предварительное замечание. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве и перпендикулярность прямой к плоскости находятся в некоторой зависимости. Именно наличие параллельности одних элементов влечет за собой перпендикулярность других, и, обратно, из перпендикулярности одних элементов можно сделать заключение о параллельности других. Эта связь между параллельностью и перпендикулярностью прямых и плоскостей в пространстве выражается следующими теоремами.

31. Теорема. ***Если плоскость*** (P, рис. 18) ***перпендикулярна к одной из параллельных прямых*** (AB), ***то она перпендикулярна и к другой*** (CD).

Проведем через точку B на плоскости P две какие-нибудь прямые BE и BF, а через точку D проведем прямые DG и DH, соответственно параллельные прямым BE и BF. Тогда будем иметь: $\angle ABE = \angle CDG$ и $\angle ABF = \angle CDH$ как углы с параллельными сторонами. Но углы ABE и ABF прямые, так как $AB \perp P$, значит, углы CDG и CDH также прямые (§ 18). Следовательно, $CD \perp P$ (§ 24).

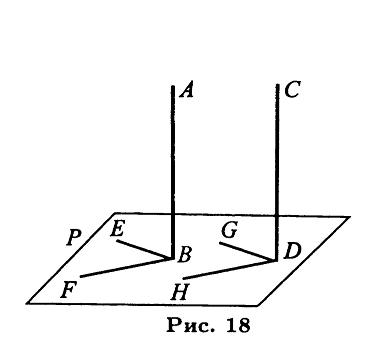


Рис. 18

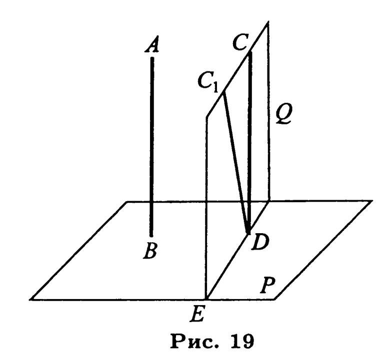


Рис. 19

32. Обратная теорема. ***Если две прямые*** (AB и CD, рис. 19) ***перпендикулярны к одной и той же плоскости*** (P), ***то они параллельны.***

Предположим противное, т. е. что прямые AB и CD не параллельны. Проведем тогда через точку D прямую, параллельную AB. При нашем предположении это будет какая-нибудь прямая DC_1, не сливающаяся с DC. Согласно прямой теореме прямая DC будет перпендикулярна к плоскости P. Проведем через CD и C_1D плоскость Q и возьмем линию ее пересечения DE с плоскостью P. Так как (на основании предыдущей теоремы) $C_1D \perp P$, то $\angle C_1DB$ прямой, а так как по условию $CD \perp P$, то $\angle CDE$ также прямой. Таким образом, окажется, что в плоскости Q к прямой DE из одной ее точки D восставлены два перпендикуляра DC и DC_1. Так как это невозможно, то нельзя допустить, чтобы прямые AB и CD были не параллельны.

33. Теорема. ***Если прямая*** (BB_1, рис. 20) ***перпендикулярна к одной из параллельных плоскостей*** (P), ***то она перпендикулярна и к другой*** (Q).

Проведем через прямую BB_1 какие-нибудь две плоскости M и N, каждая из которых пересекается с P и Q по параллельным прямым: одна — по параллельным прямым BC и B_1C_1, другая — по параллельным прямым BD и B_1D_1. Согласно условию прямая BB_1 перпендикулярна к прямым BC и BD; следовательно, она также перпендикулярна к параллельным им прямым B_1C_1 и B_1D_1, а потому перпендикулярна и к плоскости Q, на которой лежат прямые B_1C_1 и B_1D_1.

34. Обратная теорема. ***Если две плоскости*** (P и Q, рис. 21) ***перпендикулярны к одной и той же прямой*** (AB), ***то они параллельны.***

Предположим противное, т. е. что плоскости P и Q пересекаются. Возьмем на линии их пересечения какую-нибудь точку C и проведем плоскость R через C и прямую AB. Плоскость R пересечет плоскости P и Q соответственно по прямым AC и BC. Так как $AB \perp P$,

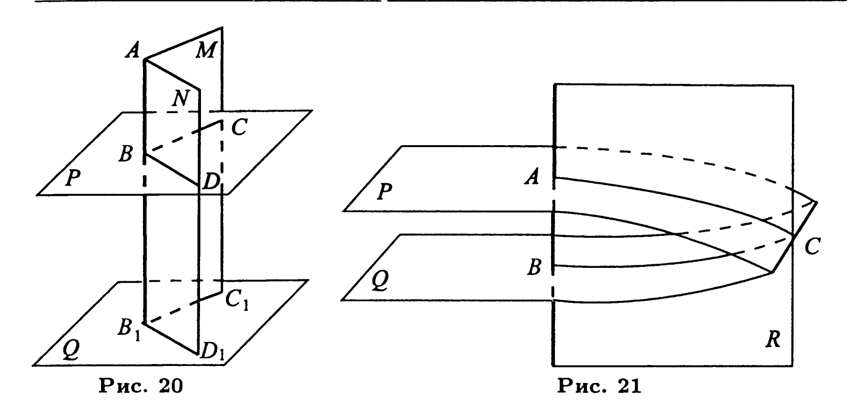


Рис. 20 **Рис. 21**

то $AB \perp AC$, и так как $AB \perp Q$, то $AB \perp BC$. Таким образом, в плоскости R мы будем иметь два перпендикуляра к прямой AB, проходящих через одну и ту же точку C, перпендикуляры AC и BC. Так как это невозможно, то предположение, что плоскости P и Q пересекаются, неверно. Значит, они параллельны.

Задачи на построение

35. *Через данную точку* (C) *в пространстве провести плоскость, перпендикулярную к данной прямой* (AB) (рис. 22).

Решение. 1-й случай. Данная точка C лежит на прямой AB (рис. 22).

Проведем через прямую AB какие-нибудь две плоскости P и Q. Искомая плоскость должна пересекать эти плоскости по прямым, перпендикулярным к прямой AB (§ 24). Отсюда построение: через AB проводим две произвольные плоскости P и Q. В каждой из этих плоскостей восставляем перпендикуляр к прямой AB в точке C (в плоскости P — перпендикуляр CD, в плоскости Q — перпендикуляр CE. Плоскость, проходящая через прямые CD и CE, есть искомая.

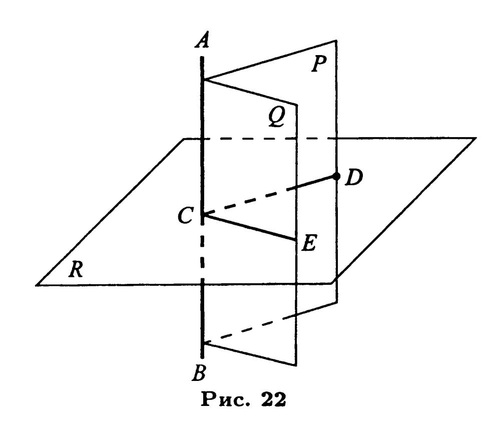


Рис. 22

2-й случай. Данная точка D не лежит на прямой AB (рис. 22). Через точку D и прямую AB проводим плоскость P и в этой плоскости строим прямую DC, перпендикулярную к AB. Через прямую AB проводим произвольно вторую

плоскость Q и в этой плоскости строим прямую CE, перпендикулярную к AB. Искомая плоскость должна пересечь плоскости P и Q по прямым, перпендикулярным к AB. Отсюда построение: через точку D проводим в плоскости P прямую DC, перпендикулярную к AB. Прямая DC пересечет прямую AB в некоторой точке C.

Через точку C проводим в плоскости Q прямую CE перпендикулярно к AB. Плоскость, проходящая через прямые CD и CE, — искомая.

Так как в каждой из плоскостей P и Q через данную точку можно провести лишь одну прямую, перпендикулярную к данной, то задача в обоих случаях имеет одно решение, т. е. через каждую точку в пространстве можно провести лишь одну плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

36. *Через данную точку* (O) *пространства провести прямую, перпендикулярную к данной плоскости* (P).

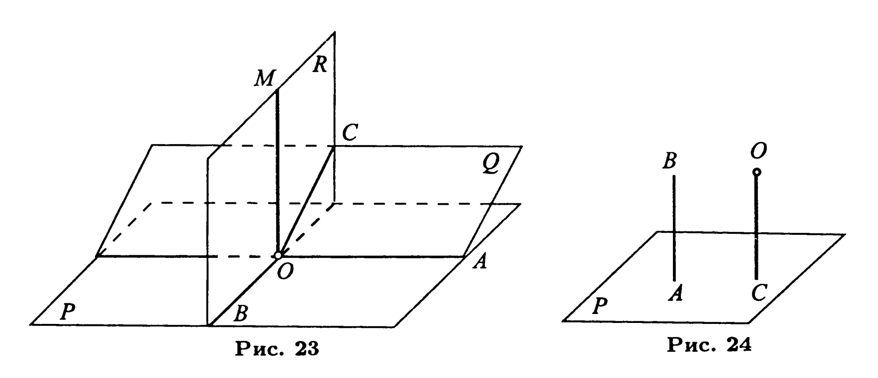


Рис. 23 **Рис. 24**

1-й случай. Точка O лежит на плоскости P (рис. 23). Проведем на плоскости P через точку O две какие-либо взаимно перпендикулярные прямые OA и OB. Проведем, далее, через прямую OA какую-либо новую плоскость Q и на этой плоскости Q построим прямую OC, перпендикулярную к OA. Через прямые OB и OC проведем новую плоскость R и построим в ней прямую OM, перпендикулярную к OB. Прямая OM и будет искомым перпендикуляром к плоскости P.

Действительно, так как $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$, то прямая AO перпендикулярна к плоскости R и, следовательно, $OA \perp OM$. Таким образом, мы видим, что $OM \perp OA$ и $OM \perp OB$; следовательно, OM перпендикулярна к плоскости P.

2-й случай. Точка O не лежит на плоскости P (рис. 24). Возьмем на плоскости P какую-нибудь точку A и выполним для нее предыдущее построение. Мы получим тогда прямую AB, перпендикулярную к плоскости P. После этого через точку O проводим прямую, параллельную AB. Эта прямая и будет искомой (§ 31). Задача в обоих

случаях имеет одно решение. В самом деле, так как два перпендикуляра к одной и той же плоскости параллельны, то через одну и ту же точку O нельзя провести двух перпендикуляров к плоскости P. Следовательно, через каждую точку в пространстве можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную к данной плоскости.

37. Пример более сложной задачи. *Даны две скрещивающиеся прямые* (a и b, рис. 25). *Построить прямую, пересекающую обе данные прямые и перпендикулярную к ним обеим.*

Решение. Проведем через прямую a плоскость M, параллельную прямой b (§ 21). Из двух каких-нибудь точек прямой b опустим перпендикуляры AA_1 и BB_1 на плоскость M. Соединим точки A_1 и B_1 отрезком прямой и найдем точку C_1 пересечения прямых A_1B_1 и a. Через точку C_1 проведем прямую, перпендикулярную к плоскости M. Предоставляем самим учащимся доказать, что эта прямая 1) пересечется с прямой b в некоторой точке C и 2) будет перпендикулярна как к прямой a, так и к прямой b.

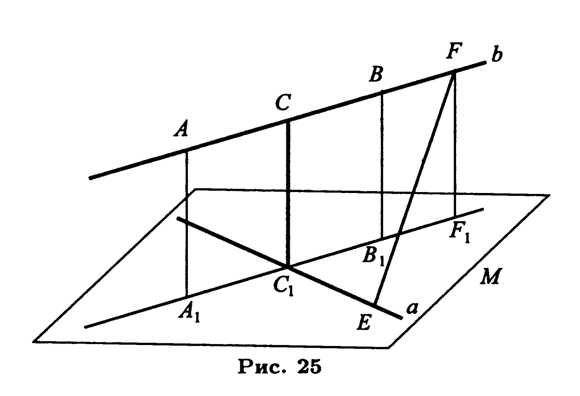


Рис. 25

Прямая CC_1 будет, следовательно, искомой прямой.

Заметим, что отрезок CC_1 меньше всех других отрезков, которые можно получить, соединяя точки прямой a с точками прямой b. В самом деле, возьмем на прямой a какую-нибудь точку E и на прямой b какую-нибудь точку F, соединим эти точки отрезком прямой и докажем, что $EF > CC_1$. Опустим из точки F перпендикуляр FF_1 на плоскость M. Тогда будем иметь: $EF > FF_1$ (§ 26). Но $FF_1 = CC_1$, следовательно $EF > CC_1$. На этом основании длина отрезка CC_1 называется кратчайшим расстоянием между данными прямыми a и b.

5. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ. УГОЛ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ, УГОЛ ДВУХ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

Двугранные углы

38. Определения. Часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, называется **полуплоскостью**. Фигура, образованная двумя полуплоскостями (P и Q,

10—1568

рис. 26), исходящими из одной прямой (AB), называется **двугранным углом**. Прямая AB называется **ребром**, а полуплоскости P и Q — сторонами или **гранями** двугранного угла.

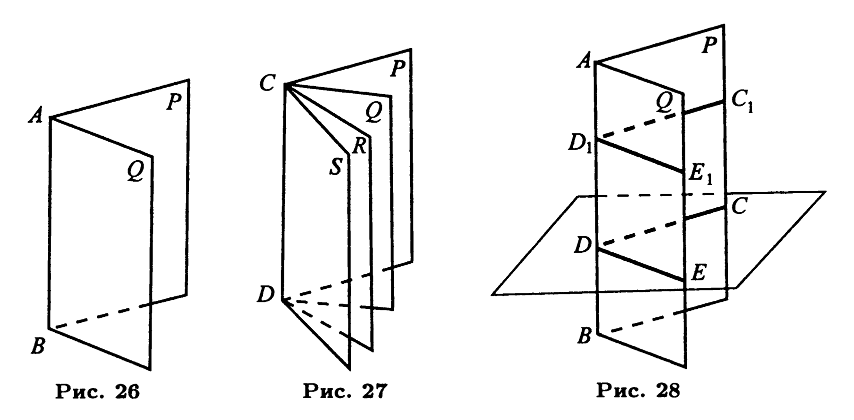


Рис. 26 **Рис. 27** **Рис. 28**

Такой угол обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугранный угол AB). Но если при одном ребре лежат несколько двугранных углов, то каждый на них обозначают четырьмя буквами, из которых две средние стоят при ребре, а две крайние — у граней (например, двугранный угол $SCDR$) (рис. 27).

Если из произвольной точки D ребра AB (рис. 28) проведем на каждой грани по перпендикуляру к ребру, то образованный ими угол CDE называется **линейным углом** двугранного угла.

Величина линейного угла не зависит от положения его вершины на ребре. Так, линейные углы CDE и $C_1D_1E_1$ равны, потому что их стороны соответственно параллельны и одинаково направлены.

Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру, так как она содержит две прямые, перпендикулярные к нему. Поэтому для получения линейного угла достаточно грани данного двугранного угла пересечь плоскостью, перпендикулярной к ребру, и рассмотреть получившийся в этой плоскости угол.

39. Равенство и неравенство двугранных углов. Два двугранных угла считаются **равными**, если они при вложении могут совместиться; в противном случае тот из двугранных углов считается меньшим, который составит часть другого угла.

Подобно углам в планиметрии двугранные углы могут быть **смежные, вертикальные** и пр.

Если два смежных двугранных угла равны между собой, то каждый из них называется **прямым двугранным углом**.

Теоремы. 1) ***Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы.***

2) ***Большему двугранному углу соответствует больший линейный угол.***

Пусть $PABQ$ и $P_1A_1B_1Q_1$ (рис. 29) — два двугранных угла. Вложим угол A_1B_1 в угол AB так, чтобы ребро A_1B_1 совпало с ребром AB и грань P_1 с гранью P. Тогда если эти двугранные углы равны, то грань Q_1 совпадет с гранью Q; если же угол A_1B_1 меньше угла AB, то грань Q_1 займет некоторое положение внутри двугранного угла, например Q_2.

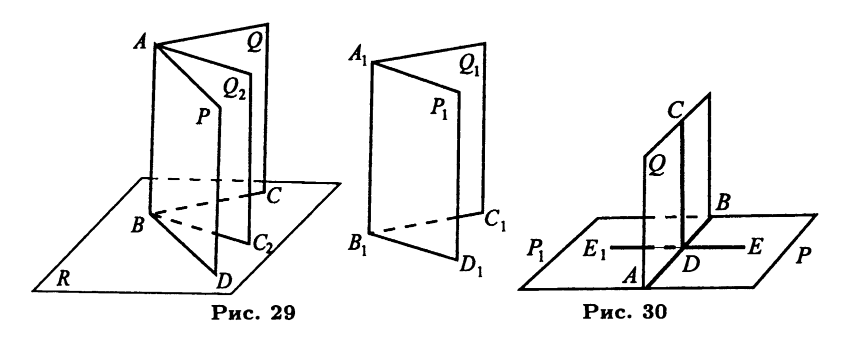


Рис. 29 Рис. 30

Заметив это, возьмем на общем ребре какую-нибудь точку B и проведем через нее плоскость R, перпендикулярную к ребру. От пересечения этой плоскости с гранями двугранных углов получатся линейные углы. Ясно, что если двугранные углы совпадут, то у них окажется один и тот же линейный угол CBD; если же двугранные углы не совпадут, если, например, грань Q_1 займет положение Q_2, то у большего двугранного угла окажется больший линейный угол (именно: $\angle CBD > \angle C_2BD$).

40. Обратные теоремы. 1) ***Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.***

2) ***Большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.***

Эти теоремы легко доказываются от противного.

41. Следствия. 1) *Прямому двугранному углу соответствует прямой линейный угол, и обратно.*

Пусть (рис. 30) двугранный угол $PABQ$ прямой. Это значит, что он равен смежному углу $QABP_1$. Но в таком случае линейные углы CDE и CDE_1 также равны; а так как они смежные, то каждый из них должен быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы CDE и CDE_1, то равны и смежные двугранные углы, т. е. каждый из них должен быть прямой.

2) *Все прямые двугранные углы равны, потому что у них равны линейные углы.*

Подобным же образом легко доказать, что:

3) *Вертикальные двугранные углы равны.*

4) *Двугранные углы с соответственно параллельными и одинаково* (или противоположно) *направленными гранями равны.*

5) Если за единицу двугранных углов возьмем такой двугранный угол, который соответствует единице линейных углов, то можно сказать, что *двугранный угол измеряется его линейным углом.*

Перпендикулярные плоскости

42. Определение. Две плоскости называются **взаимно перпендикулярными**, если, пересекаясь, они образуют прямые двугранные углы.

43. Теорема (выражающая признак перпендикулярности двух плоскостей). ***Если плоскость*** (P, рис. 31) ***проходит через перпендикуляр*** (AB) к другой ***плоскости*** (Q), ***то она перпендикулярна к этой плоскости.***

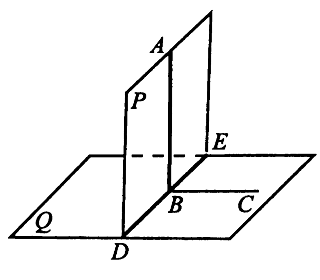


Рис. 31

Пусть DE будет линия пересечения плоскостей P и Q. На плоскости Q проведем $BC \perp DE$. Тогда угол ABC будет линейным углом двугранного угла $PDEQ$. Так как прямая AB по условию перпендикулярна к Q, то $AB \perp BC$; значит, угол ABC прямой, а потому и двугранный угол прямой, т. е. плоскость P перпендикулярна к плоскости Q.

44. Теорема. ***Если две плоскости*** (P и Q, рис. 31) ***взаимно перпендикулярны и к одной из них*** (Q) ***проведен перпендикуляр*** (AB), ***имеющий общую точку*** (A) ***с другой плоскостью*** (P), ***то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости*** (P).

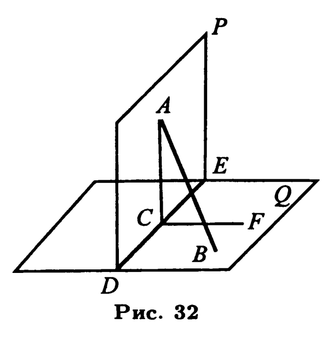


Рис. 32

Предположим, что перпендикуляр AB не лежит в плоскости P (как изображено на рис. 32). Пусть DE будет линия пересечения плоскостей P и Q. На плоскости P проведем прямую $AC \perp DE$, а на плоскости Q проведем прямую $CF \perp DE$. Тогда угол ACF, как линейный угол прямого двугранного угла, будет прямой. Поэтому линия AC, образуя прямые углы с DE и CF, будет перпендикуляром к плоскости Q. Мы будем иметь тогда два перпендикуляра, опущенные из одной и той же точки A на плоскость Q, именно AB и AC. Так как это невозможно (§ 36), то допущение неверно; значит, перпендикуляр AB лежит в плоскости P.

45. Следствие. *Линия пересечения* AB (рис. 33) *двух плоскостей* (P и Q), *перпендикулярных к третьей плоскости* (R), *есть перпендикуляр к этой плоскости.*

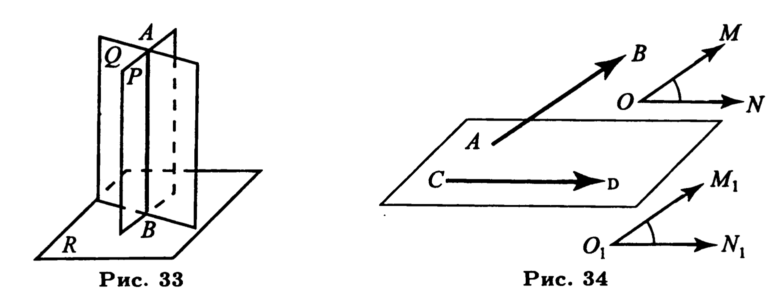


Рис. 33

Рис. 34

Действительно, если через какую-нибудь точку A линии пересечения плоскостей P и Q проведем перпендикуляр к плоскости R, то этот перпендикуляр согласно предыдущей теореме должен лежать и в плоскости Q, и в плоскости P, значит, он сольется с AB.

Угол двух скрещивающихся прямых

46. Определение. Углом двух **скрещивающихся** прямых (AB и CD, рис. 34), для которых дано положение и направление, называется угол (MON), который получится, если из произвольной точки пространства (O) проведем полупрямые (OM и ON), соответственно параллельные данным прямым (AB и CD) и одинаково с ними направленные.

Величина этого угла не зависит от положения точки O, так как если построим указанным путем угол $M_1O_1N_1$ с вершиной в какой-нибудь другой точке O_1, то $\angle MON = \angle M_1O_1N_1$, потому что эти углы имеют соответственно параллельные и одинаково направленные стороны.

Угол, образуемый прямой с плоскостью

47. Проекция точки и прямой на плоскость. Мы говорили ранее (§ 25), что когда из одной точки проведены к плоскости перпендикуляр и наклонная, то проекцией этой наклонной на плоскость называется отрезок, соединяющий основание перпендикуляра с основанием наклонной. Дадим теперь более общее определение проекции.

1) *Ортогональной* (*или прямоугольной*) *проекцией какой-нибудь точки на данную плоскость* (например, точки M на плоскость P, рис. 35) *называется основание* (m) *перпендикуляра, опущенного на эту плоскость из взятой точки.*

2) *Ортогональной проекцией какой-нибудь линии на плоскость называется геометрическое место проекций всех точек этой линии.*

В частности, если проектируемая линия есть прямая (например, AB, рис. 35), не перпендикулярная к плоскости (P), то проекция ее на эту плоскость есть также прямая. В самом деле, если мы через прямую AB и перпендикуляр Mm, опущенный на плоскость

проекций из какой-нибудь одной точки M этой прямой, проведем плоскость Q, то эта плоскость должна быть перпендикулярна к плоскости P; поэтому перпендикуляр, опущенный на плоскость P из любой точки прямой AB (например, из точки N), должен лежать в этой плоскости Q (§ 44) и, следовательно, проекции всех точек прямой AB должны лежать на прямой ab, по которой пересекаются плоскости P и Q. Обратно, всякая точка этой прямой ab есть проекция какой-нибудь точки прямой AB, так как перпендикуляр, восставленный из любой точки прямой ab, лежит на плоскости Q и, следовательно, пересекается с AB в некоторой точке. Таким образом, прямая ab представляет собой геометрическое место проекций всех точек данной прямой AB и, следовательно, есть ее проекция.

Для краткости речи вместо «ортогональная проекция» мы будем говорить просто «проекция».

48. Угол прямой с плоскостью. *Углом прямой* (AB, рис. 36) *с плоскостью* (P) в том случае, когда прямая наклонна к плоскости, называется *острый угол* (ABC), *составленный этой прямой с ее проекцией на плоскость.*

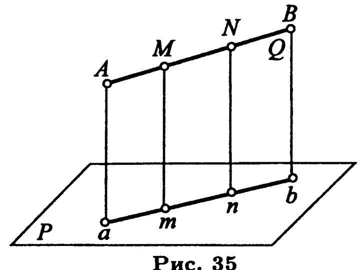


Рис. 35

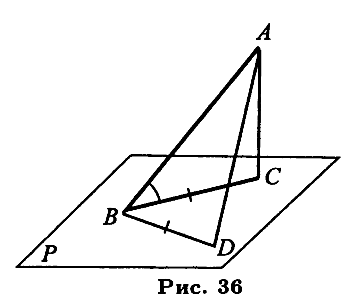


Рис. 36

Угол этот обладает тем свойством, что он есть наименьший из всех углов, которые наклонная образует с прямыми, проведенными на плоскости P через основание наклонной. Докажем, например, что угол ABC меньше угла ABD. Для этого отложим отрезок $BD = BC$ и соединим D с A. У треугольников ABC и ABD две стороны одного равны соответственно двум сторонам другого, но третьи стороны не равны, а именно: $AD > AC$ (§ 26). Вследствие этого угол ABD больше угла ABC.

Многогранные углы

49. Определения. Возьмем несколько углов (рис. 37): ASB, BSC, CSD, которые, примыкая последовательно один к другому, расположены в одной плоскости вокруг общей вершины S. Повернем плоскость угла ASB вокруг общей стороны SB так, чтобы эта плоскость составила некоторый двугранный угол с плоскостью BSC. Затем, не изменяя получившегося двугранного угла, повернем его

вокруг прямой SC так, чтобы плоскость BSC составила некоторый двугранный угол с плоскостью CSD. Продолжим такое последовательное вращение вокруг каждой общей стороны. Если при этом последняя сторона SF совместится с первой стороной SA, то образуется фигура (рис. 38), которая называется **многогранным углом**. Углы $ASB, BSC, \ldots$ называются **плоскими углами или гранями**, стороны их $SA, SB, \ldots$ называются **ребрами**, а общая вершина S — **вершиной** многогранного угла. Каждое ребро является вместе с тем ребром некоторого двугранного угла; поэтому в **многогранном** угле столько **двугранных** углов и столько плоских, сколько в нем всех ребер. Наименьшее число граней в многогранном угле — три; такой угол называется **трехгранным**. Могут быть углы четырехгранные, пятигранные и т. д.

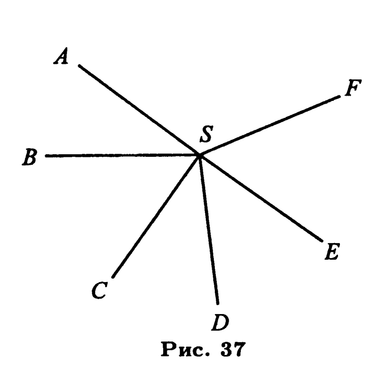


Рис. 37

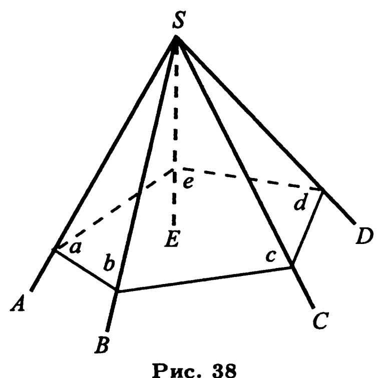


Рис. 38

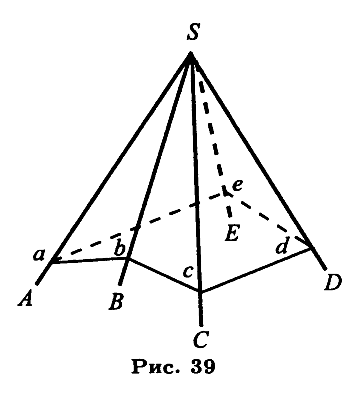


Рис. 39

Многогранный угол обозначается или одной буквой S, поставленной у вершины, или же рядом букв $SABCDE$, из которых первая обозначает вершину, а прочие — ребра по порядку их расположения.

Многогранный угол называется **выпуклым**, если он весь расположен по одну сторону от плоскости каждой из его граней, неограниченно продолженной. Таков, например, угол, изображенный на рис. 38. Наоборот, угол на рис. 39 нельзя назвать выпуклым, так как он расположен по обе стороны от грани ASB или от грани BSC.

Если все грани многогранного угла пересечем плоскостью, то в сечении образуется многоугольник $(abcde)$. В выпуклом многогранном угле этот многоугольник тоже выпуклый. Мы будем рассматривать только **выпуклые** многогранные углы.

50. Теорема. ***В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.***

Пусть в трехгранном угле $SABC$ (рис. 40) наибольший из плоских углов есть угол ASC. Отложим на этом угле угол ASD, равный углу ASB, и проведем какую-нибудь прямую AC, пересекающую SD в некоторой точке D. Отложим $SB = SD$.

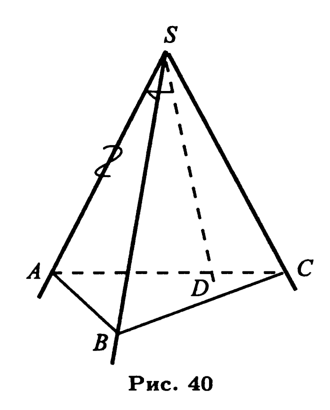


Рис. 40

Соединив B с A и C, получим $\triangle ABC$, в котором

$$AD + DC < AB + BC.$$

Треугольники ASD и ASB равны, так как они содержат по равному углу, заключенному между равными сторонами; следовательно, $AD = AB$. Поэтому если в выведенном неравенстве отбросить равные слагаемые AD и AB, получим, что $DC < BC$. Теперь замечаем, что у треугольников SCD и SCB две стороны одного равны двум сторонам другого, а третьи стороны не равны; в таком случае против большей из этих сторон лежит больший угол; значит,

$$CSD < \angle CSB.$$

Прибавив к левой части этого неравенства угол ASD, а к правой равный ему угол ASB, получим то неравенство, которое требовалось доказать:

$$\angle ASC < \angle CSB + \angle ASB.$$

Мы доказали, что даже наибольший плоский угол меньше суммы двух других углов. Значит, теорема доказана.

Следствие. Отнимем от обеих частей последнего неравенства по углу ASB или по углу CSB; получим:

$$\angle ASC - \angle ASB < \angle CSB;$$
$$\angle ASC - \angle CSB < \angle ASB.$$

Рассматривая эти неравенства справа налево и приняв во внимание, что угол ASC как наибольший из трех углов больше разности двух других углов, мы приходим к заключению, что в трехгранном угле каждый плоский угол больше разности двух других углов.

51. Теорема. ***В выпуклом многогранном угле сумма всех плоских углов меньше*** $4d$.

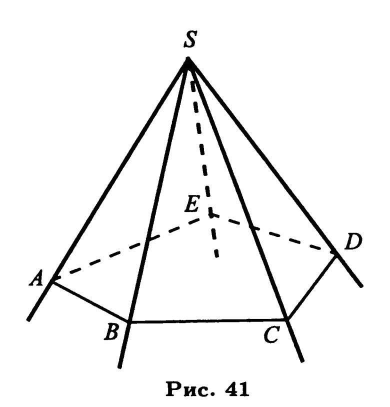


Рис. 41

Пересечем грани (рис. 41) выпуклого угла $SABCDE$ какой-нибудь плоскостью; от этого в сечении получим выпуклый n-угольник $ABCDE$. Применяя теорему предыдущего параграфа к каждому из трехгранных углов, вершины которых находятся в точках A, B, C, D и E, находим:

$$\angle ABC < \angle ABS + \angle SBC;$$
$$\angle BCD < \angle BCS + \angle SCD \quad \text{и т. д.}$$

Сложим почленно все эти неравенства. Тогда в левой части получим сумму всех углов многоугольника $ABCDE$, которая равна $2dn - 4d$, а в правой — сумму углов треугольников ABS, SBC и т. д., кроме тех углов, которые лежат при вершине S. Обозначив сумму этих последних углов буквой x, мы получим после сложения:

$$2dn - 4d < 2dn - x.$$

Так как в разностях $2dn-4d$ и $2dn-x$, уменьшаемые одинаковы, то, чтобы первая разность была меньше второй, необходимо, чтобы вычитаемое $4d$ было больше вычитаемого x; значит, $4d > x$, т. е. $x < 4d$.

Простейшие случаи равенства трехгранных углов

52. Теоремы. ***Трехгранные углы равны, если они имеют:***

1) ***по равному двугранному углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами,*** или

2) ***по равному плоскому углу, заключенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными двугранными углами.***

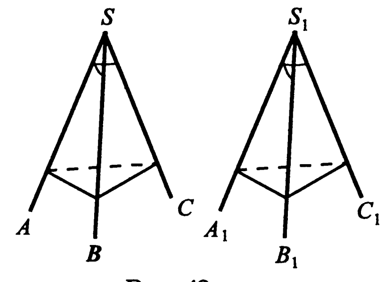


Рис. 42

1) Пусть S и S_1 — два трехгранных угла (рис. 42), у которых $\angle ASB = \angle A_1S_1B_1, \angle ASC = \angle A_1S_1C_1$ (и эти равные углы одинаково расположены) и двугранный угол AS равен двугранному углу A_1S_1. Вложим угол S_1 в угол S так, чтобы у них совпали точки S_1 и S, прямые S_1A_1 и SA и плоскости $A_1S_1B_1$ и ASB. Тогда ребро S_1B_1 пойдет по SB (в силу

равенства углов $A_1S_1B_1$ и ASB), плоскость $A_1S_1C_1$ пойдет по ASC (по равенству двугранных углов) и ребро S_1C_1 пойдет по ребру SC (в силу равенства углов $A_1S_1C_1$ и ASC). Таким образом, трехгранные углы совместятся всеми своими ребрами, т. е. они будут равны.

2) Второй признак, подобно первому, доказывается вложением.

53. Симметричные многогранные углы. Как известно, вертикальные углы равны, если речь идет об углах, образованных прямыми или плоскостями. Посмотрим, справедливо ли это утверждение применительно к углам многогранным.

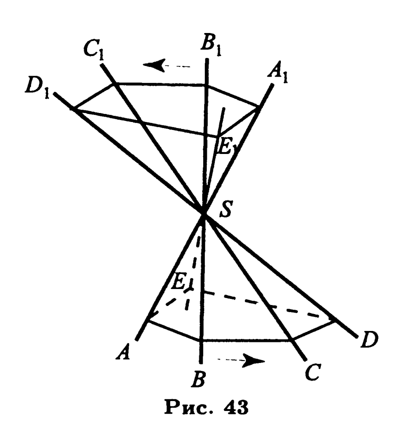


Рис. 43

Продолжим (рис. 43) все ребра угла $SABCDE$ за вершину S, тогда образуется другой многогранный угол $SA_1B_1D_1E_1$, который можно назвать **вертикальным** по отношению к первому углу. Нетрудно видеть, что у обоих углов равны соответственно и плоские углы, и двугранные, но те и другие расположены в обратном порядке. Действительно, если мы вообразим наблюдателя, который смотрит извне многогранного угла на его вершину, то ребра SA, SB, SC, SD, SE будут казаться ему расположенными в направлении против движения часовой стрелки, тогда как смотря на угол $SA_1C_1D_1E_1$ он видит ребра $SA_1, SB_1, \ldots$ расположенными по движению часовой стрелки.

Многогранные углы с соответственно равными плоскими и двугранными углами, но расположенными в обратном порядке, вообще не могут совместиться при вложении; значит, они не равны. Такие углы называются с и м м е т р и ч н ы м и (относительно вершины S). Подробнее о симметрии фигур в пространстве будет сказано ниже.

УПРАЖНЕНИЯ

Д о к а з а т ь т е о р е м ы:

1. Две плоскости, параллельные третьей, параллельны между собой.

2. Все прямые, параллельные данной плоскости и проходящие через одну точку, лежат в одной плоскости, параллельной данной.

3 Дана плоскость P и параллельная ей прямая a. Доказать, что все точки прямой a находятся на одинаковом расстоянии от плоскости P.

4. Доказать, что все точки одной из двух параллельных плоскостей находятся на одинаковом расстоянии от другой плоскости.

5. Две плоскости, проходящие через две данные параллельные прямые и не параллельные между собой, пересекаются по прямой, параллельной данным прямым.

6. Если прямая a параллельна какой-либо прямой b, лежащей на плоскости M, то всякая плоскость, проходящая через a, пересекает плоскость M по прямой, параллельной b, или по прямой b.

7. Если прямая a параллельна плоскости M, то всякая прямая, проходящая через точку, лежащую в плоскости M, и параллельная прямой a, лежит в плоскости M.

8. Если даны две скрещивающиеся прямые a и b и через первую проведена плоскость, параллельная второй, а через вторую — плоскость, параллельная первой, то эти две плоскости параллельны.

9. Все прямые, проходящие через какую-нибудь точку на прямой a и перпендикулярные к этой прямой, лежат в одной плоскости, перпендикулярной к a.

10. Если плоскость и прямая перпендикулярны к одной прямой, то они параллельны.

11. Если прямая a, параллельная плоскости M, пересекает прямую b, перпендикулярную этой плоскости, то прямые a и b перпендикулярны.

Задачи на построение

12. Через данную точку провести плоскость, параллельную двум данным прямым a и b.

13. Через данную точку провести прямую, параллельную данной плоскости и пересекающую данную прямую.

14. Построить прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную третьей данной прямой.

15. Построить какую-либо прямую, пересекающую две данные прямые и параллельную данной плоскости (задача неопределенная).

16. Построить какую-либо прямую, пересекающую три данные прямые (задача неопределенная).

17. Через данную точку провести прямую, перпендикулярную двум данным скрещивающимся прямым.

18. Через данную прямую провести плоскость, перпендикулярную к данной плоскости.

19. Даны плоскость M и прямая $a \| M$. Через прямую a провести плоскость, пересекающую плоскость M под данным углом.

20. Дана плоскость M и две точки A и B по одну сторону от нее. Найти на плоскости M такую точку C, чтобы сумма $AC + BC$ была наименьшей.

Глава II

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ОТРЕЗКА И ФИГУРЫ

54. Изображение точки при помощи проекции на две плоскости. Вообразим плоскости проекций, горизонтальную H и вертикальную V, пересекающиеся под прямым углом по прямой xy, которую мы будем называть осью **проекций** (рис. 44).

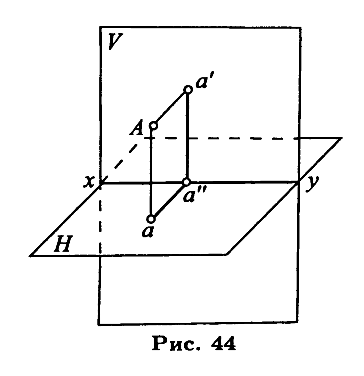


Рис. 44

Плоскости эти образуют четыре двугранных угла, из которых мы для простоты будем рассматривать только один, именно передний верхний. Положим, что внутри этого угла расположена какая-нибудь точка A. Опустим из нее перпендикуляры на плоскости H и V. Тогда мы получим на этих плоскостях проекции точки A, именно: a есть **горизонтальная** проекция, a' — **вертикальная** (проекции эти называются ортогональными, так как они получаются опусканием перпендикуляра на плоскость).

Обыкновенно каждая из этих проекций обозначается малой буквой одного наименования с той большой буквой, которая обозначает проектируемую точку, причем буква, обозначающая вертикальную проекцию, берется со знаком наверху. Перпендикуляры, с помощью которых получаются проекции точки, называются **проектирующими перпендикулярами**: Aa — горизонтально-проектирующий перпендикуляр, Aa' — вертикально-проектирующий перпендикуляр.

Если через эти перпендикуляры проведем плоскость, то она должна быть перпендикулярной к плоскости H и к плоскости V (§ 43); следовательно, должна быть перпендикулярна и к оси xy (§ 45), и потому прямые aa'' и $a'a''$, по которым эта плоскость пересекается с плоскостями H и V, будут перпендикулярны к оси xy; следовательно, они образуют линейный угол двугранного угла, составленного плоскостями H и V, и так как этот двугранный угол прямой, то и линейный его угол

должен быть прямым. Таким образом, четырехугольник $Aaa''a'$ будет прямоугольником, плоскость которого перпендикулярна к оси xy.

Заметив это, повернем горизонтальную полуплоскость h вокруг оси xy на 90° книзу; тогда она совпадет с нижней вертикальной полуплоскостью, образуя с верхней вертикальной полуплоскостью одну вертикальную плоскость. При этом точки a'' и a' останутся на своих местах, а точка a займет положение ниже оси xy и расположится на продолжении перпендикуляра $a'a''$ на расстоянии $a''a$, равном Aa'. Мы получим тогда развернутый рис. 45, который впредь будем называть **эпюром**. Рисунок этот состоит из прямой xy, изображающей ось проекций, и двух точек, расположенных на одном перпендикуляре к оси xy; нижняя точка есть горизонтальная проекция, а верхняя — вертикальная проекция точки A.

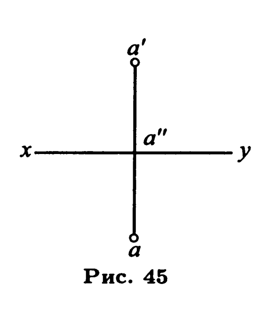


Рис. 45

Конечно, всякой точке A, взятой внутри двугранного угла (рис. 44), соответствуют на эпюре две вполне определенные точки a и a', расположенные на одном перпендикуляре к оси xy. Обратно, всяким двум точкам эпюра a и a', расположенным на одном перпендикуляре к оси xy (точка a ниже xy, а точка a' выше xy), соответствует одна определенная точка A внутри двугранного угла. Чтобы получить эту точку, мы должны вообразить, что нижняя половина эпюра вращением вокруг оси xy снова повернута на 90° кверху и затем из точек a и a' восстановлены перпендикуляры к плоскостям образовавшегося двугранного угла; пересечение этих перпендикуляров и определит точку A.

55. Частные случаи. Из рис. 46 и 47 видно, что если:

1) точка A лежит на горизонтальной плоскости, т. е. вертикальная проекция a' лежит на оси xy, а горизонтальная совпадает с самой точкой;

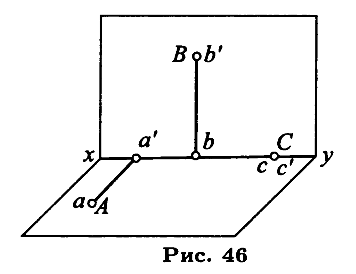


Рис. 46

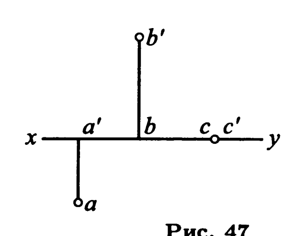


Рис. 47

2) точка B расположена на вертикальной плоскости, т. е. горизонтальная проекция лежит на оси xy, а вертикальная совпадает с самой точкой;

3) точка C лежит на оси xy, то обе ее проекции совпадают с самой точкой.

56. Изображение прямой. Мы уже видели (§ 47), что если проектируемая линия прямая, то и проекция ее должна быть прямой линией. Значит, отрезок прямой, соединяющей точки A и B (рис. 48), изобразится на эпюре (рис. 49) отрезками ab и $a'b'$, из которых первый есть горизонтальная проекция, а второй — вертикальная проекция отрезка AB. Таким образом, чтобы получить проекцию неограниченной прямой на какую-нибудь плоскость, достаточно найти проекцию на эту плоскость двух ее точек и через эти проекции провести прямую.

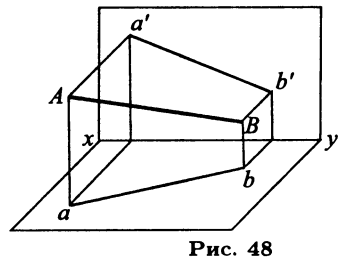


Рис. 48

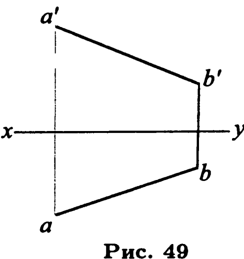


Рис. 49

Проекции прямой можно получить еще иначе, а именно: мы можем провести через эту прямую две плоскости: одну — перпендикулярную к горизонтальной плоскости проекций (она называется **горизонтально-проектирующей** плоскостью) и другую — перпендикулярную к вертикальной плоскости проекций (она называется **вертикально-проектирующей** плоскостью). Пересечение этих плоскостей с плоскостями проекции даст проекции ab и $a'b'$.

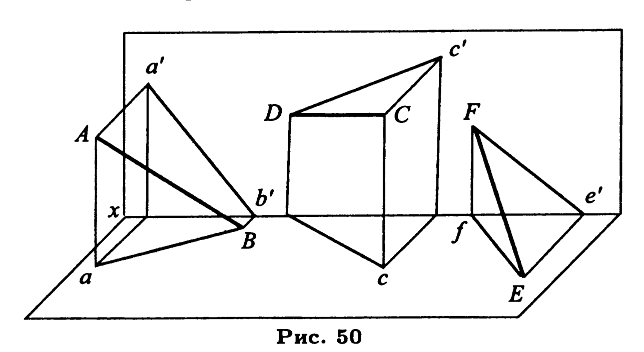


Рис. 50

Заметим, что если отрезок прямой обозначен буквами AB, то его проекции обозначаются ab (горизонтальная) и $a'b'$ (вертикальная); если неограниченная прямая обозначена одной буквой, например K, то проекции ее обозначаются тоже одной буквой (малой) k (горизонтальная) и k' (вертикальная).

57. Частные случаи. 1) Один конец отрезка AB лежит на горизонтальной плоскости.

2) Один конец отрезка CD лежит на вертикальной плоскости.

3) Отрезок EF упирается своими концами в плоскости проекций.

Эти три случая изображены в перспективном виде на рис. 50 и проекциями на эпюре на рис. 51.

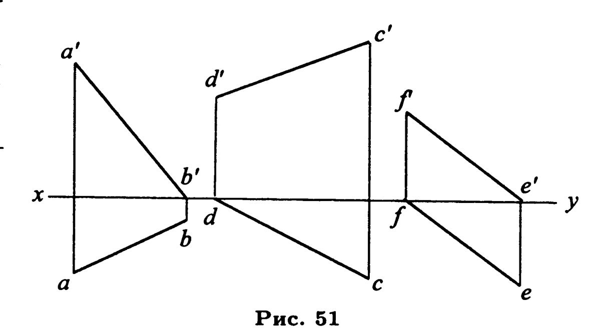


Рис. 51

4) Отрезок AB перпендикулярен к вертикальной плоскости проекций и упирается в нее (рис. 52 и 53).

5) Отрезок CD перпендикулярен к горизонтальной плоскости и упирается в нее (рис. 52 и 53).

6) Отрезок AB лежит в некоторой плоскости P, перпендикулярной к оси xy. Тогда обе проектирующие плоскости совпадают с плоскостью P и потому на эпюре ab, $a'b'$ расположены на одном перпендикуляре к оси xy (рис. 54 и 55).

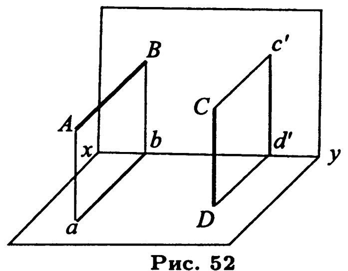




Рис. 52

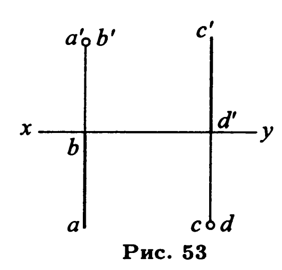


Рис. 53

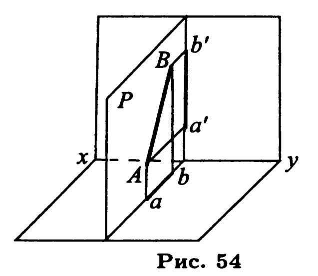


Рис. 54

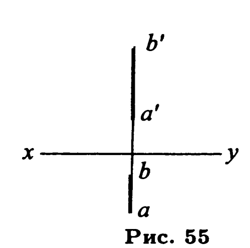


Рис. 55

7) Отрезок AB параллелен вертикальной плоскости. Тогда его горизонтальная проекция параллельна оси xy (рис. 56 и 57), а вертикальная проекция равна и параллельна AB.

8) Отрезок AB параллелен горизонтальной плоскости (рис. 58 и 59); тогда его вертикальная проекция параллельна оси xy, а горизонтальная проекция равна и параллельна самому отрезку AB.

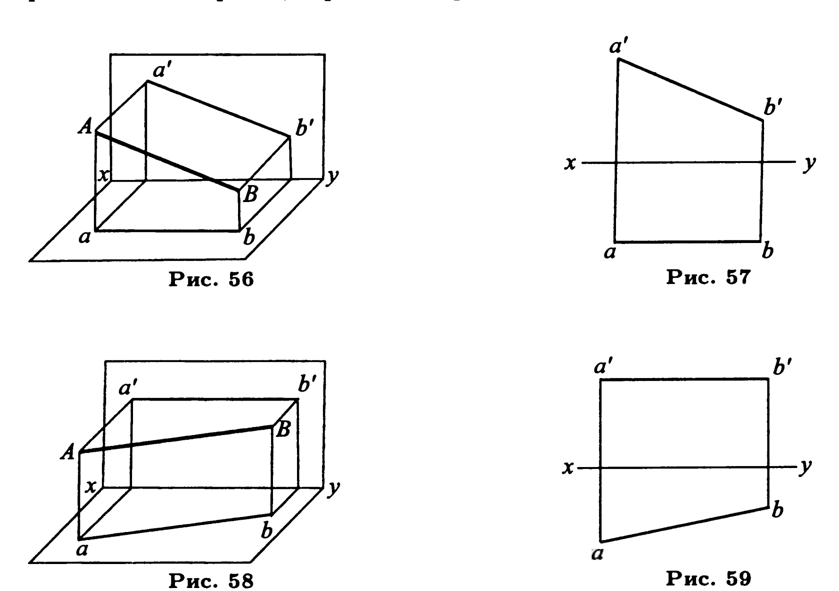


Рис. 56

Рис. 57

Рис. 58

Рис. 59

58. Проекция пересекающихся прямых. Очевидно, что если две прямые (K и L) пересекаются, то пересекаются также и их одноименные проекции (рис. 60), причем точки пересечения m и m' лежат на одном перпендикуляре к оси xy. Обратно, если одноименные проекции двух прямых пересекаются, причем точки пересечения лежат на одном перпендикуляре к оси xy, то и сами прямые пересекаются, так как точка (m, m'), определяемая точками пересечения проекций, принадлежит обеим прямым.

59. Проекции параллельных прямых параллельны. Действительно, если $AB \| CD$ (рис. 61), то стороны углов BAa и DCc параллельны и потому проектирующие плоскости также параллельны (§ 15), а параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью (P) по параллельным прямым (ab и cd) (§ 16).

60. Изображениями прямых с помощью двух ее проекций на две взаимно перпендикулярные плоскости можно пользоваться для решения различных задач, касающихся положения прямых в пространстве.

Рассмотрим несколько примеров таких задач.

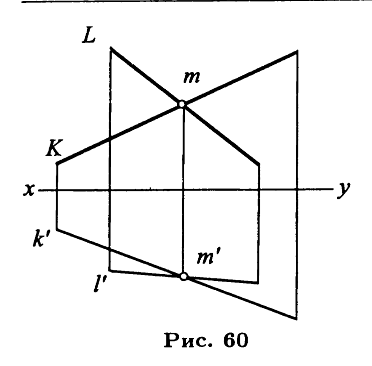


Рис. 60

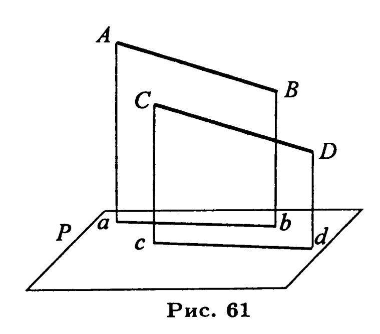


Рис. 61

З а д а ч а 1. *На эпюре даны проекции* ab *и* $a'b'$ *некоторого отрезка* AB (рис. 62). *Определить действительную величину этого отрезка.*

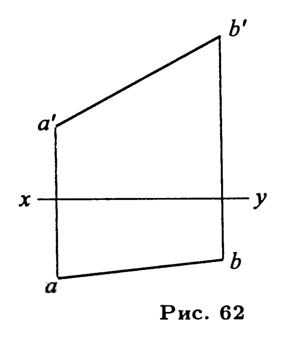


Рис. 62

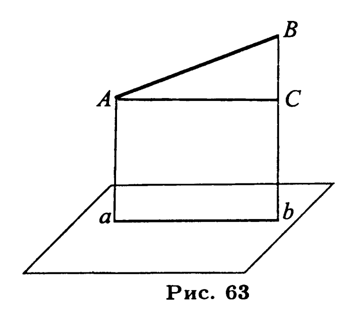


Рис. 63

П е р в ы й с п о с о б р е ш е н и я. Чтобы легче было вообразить положение отрезка в пространстве, возьмем перспективное изображение отрезка AB и его горизонтальной проекции ab (рис. 63), т. е. такое изображение, которым мы пользовались в гл. I.

Четырехугольник $ABba$ представляет собой прямоугольную трапецию с прямыми углами при точках a и b. Проведя в этой трапеции прямую ac, параллельную ab, получим прямоугольный треугольник ABC.

В этом треугольнике отрезок AB является гипотенузой, катет AC, очевидно, равен горизонтальной проекции ab отрезка AB. Эта проекция на эпюре задана. Катет BC равен разности отрезков Bb и Aa.

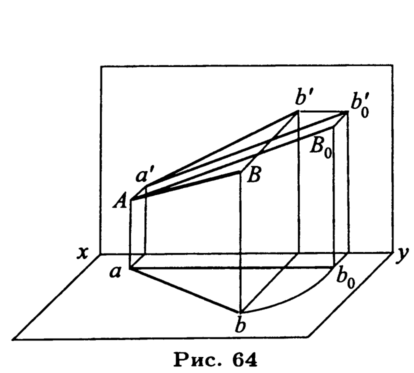
Отрезки Bb и Aa на эпюре также даны; именно они равны соответственно расстояниям точек b' и a' от оси xy, следовательно, и разность их также можно найти на эпюре. Она равна разности расстояний точек b' и a' от оси xy. Отсюда следует: чтобы найти действительную длину отрезка AB, нужно построить прямоугольный треугольник, одним из катетов которого служит горизонтальная проекция ab искомого отрезка, а другим — отрезок, равный разности расстояний

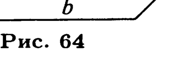
вертикальных проекций a' и b' концов отрезка от оси xy. Гипотенуза этого треугольника и дает действительную длину отрезка AB.

Второй способ. Представим себе, что отрезок AB в пространстве неизменно скреплен с прямой Aa, и будем вращать отрезок AB около этой прямой до тех пор, пока он не станет параллелен вертикальной плоскости проекций (рис. 64).

При этом его вертикальная проекция будет давать его действительную длину.

При таком вращении отрезка AB его проекции ab и $a'b'$ на эпюре будут меняться. Но его угол наклона к прямой Aa не будет меняться, а следовательно, не будет меняться и длина его горизонтальной проекции (меняется только ее направление). Значит, при этом вращении отрезка его горизонтальная проекция изменится так, что точка a на эпюре остается неподвижной, а точка b перемещается по дуге окружности. Когда отрезок AB станет параллелен вертикальной плоскости, его горизонтальная проекция сделается параллельной оси xy. Вертикальная проекция $a'b'$ при вращении также меняется, но так как расстояние точки B от горизонтальной плоскости остается неизменным, то расстояние точки b' от оси xy также не будет меняться. Отсюда следует, что точка b' будет перемещаться по прямой, параллельной оси xy. Из сказанного следует, что можно получить на эпюре проекции отрезка AB после его поворота вокруг оси Aa, с помощью следующего построения (рис. 65); описываем дугу окружности с центром в точке a радиусом, равным ab, и находим точку ее пересечения b_0 с прямой, параллельной оси xy и проходящей через точку a; через b' проводим прямую, параллельную оси xy, и продолжаем ее до пересечения в некоторой точке b_0' с перпендикуляром к оси xy, проведенным через точку b_0. Отрезки ab_0 и $a'b_0'$ будут проекциями отрезка AB после поворота. Его вертикальная проекция $a'b_0'$ будет при этом давать действительную длину отрезка AB.




Рис. 64

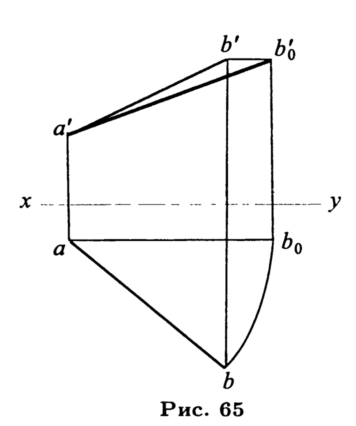


Рис. 65

61. З а д а ч а 2. *На эпюре даны проекции l и l' некоторой прямой* (рис. 66). *Найти точки пересечения этой прямой с плоскостями проекций (эти точки называются* с л е д а м и *прямой на плоскостях проекций).*

Р е ш е н и е. Точка встречи данной прямой с вертикальной плоскостью имеет своей горизонтальной проекцией точку на оси xy. С другой стороны, горизонтальная проекция этой точки должна лежать на прямой l. Следовательно, для нахождения на эпюре вертикального следа прямой продолжаем ее горизонтальную проекцию l до встречи в точке f с осью xy. Точка f будет горизонтальной проекцией искомого вертикального следа. Чтобы найти его вертикальную проекцию, восставим в точке f перпендикуляр к оси xy и продолжим его до пересечения в точке f' с прямой l'. Эта точка f' и будет искомой вертикальной проекцией вертикального следа, она, очевидно, совпадает с самим вертикальным следом. Таким же путем найдем и горизонтальный след прямой: продолжаем l' до встречи в точке m' с осью xy, в точке m' восставляем перпендикуляр к оси xy до встречи в точке m с прямой l; точка m искомая.

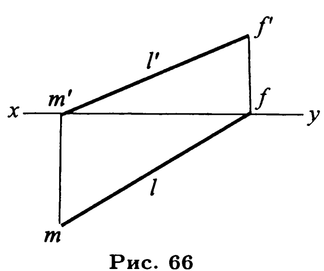


Рис. 66

62. Проекция треугольника. Если в пространстве дан треугольник, то можно построить горизонтальные и вертикальные проекции его вершин и сторон. На эпюре получается, таким образом, два треугольника, которые служат горизонтальной и вертикальной проекциями данного треугольника в пространстве.

Если форма и положение треугольника в пространстве не указаны заранее, то проекции его вершин можно задавать произвольно, соблюдая лишь условие, чтобы вертикальная и горизонтальная проекции одной и той же вершины лежали на одном перпендикуляре к оси xy. Действительно, положение плоскости в пространстве вполне определяется положением трех ее точек, которые можно брать в пространстве совершенно произвольно, лишь бы они не располагались на одной прямой.

На рис. 67 представлены проекции некоторого треугольника ABC. Пользуясь этими проекциями, можно на эпюре решать различные задачи, касающиеся положения треугольника в пространстве.

63. З а д а ч а 1. *Даны проекции abc и $a'b'c'$ треугольника* (рис. 68). *Построить на эпюре вертикальную проекцию прямой, лежащей в плоскости этого треугольника, горизонтальная проекция которой задана.*

Р е ш е н и е. Пусть прямая e есть заданная горизонтальная проекция, она встречает прямые ac и bc соответственно в точках p и q.

Так как эта прямая проведена в плоскости треугольника ABC, то она пересекается со сторонами AC и BC в точках, для которых p и q

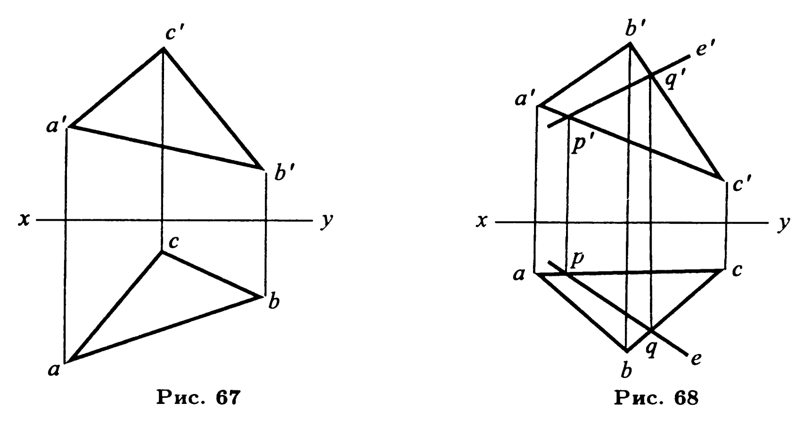


Рис. 67 Рис. 68

служат горизонтальными проекциями. Для получения вертикальных проекций тех же точек, очевидно, следует из точек p и q опустить перпендикуляры на ось xy и продолжить их до встречи в точках p' и q' соответственно с прямыми $a'c'$ и $b'c'$. Прямая $p'q'$ есть искомая вертикальная проекция прямой, лежащей в плоскости данного треугольника.

64. Задача 2. *На эпюре даны проекции* abc *и* $a'b'c'$ *треугольника* ABC (рис. 69). *Кроме того, дана горизонтальная проекция* d *точки* D*, лежащей в плоскости этого треугольника. Построить вертикальную проекцию этой точки.*

Решение. Соединив точки d и a, мы получим горизонтальную проекцию ad прямой, лежащей в плоскости треугольника ABC и соединяющей точку D с вершиной A (рис. 70). Точка p, в которой прямая ad встречает bc, есть горизонтальная проекция точки пересечения P прямой AD со стороной BC (рис. 70).

На прямой $b'c'$ находим вертикальную проекцию p' той же точки, опустив из p перпендикуляр на ось. Далее, проводим прямую $a'p'$ и на ней таким же способом находим искомую вертикальную проекцию d' точки D (рис. 69).

65. Проекции многоугольников. При построении проекций многоугольника уже нельзя произвольно задавать проекции его вершин. Если взять произвольные горизонтальные проекции вершин многоугольника, то из вертикальных их проекций произвольно (но на одном перпендикуляре с соответствующими горизонтальными проекциями) можно взять только три. Действительно, эти три вертикальные проекции вместе с горизонтальными вполне определяют плоскость, в которой лежит многоугольник.

Поэтому вертикальные проекции остальных вершин следует брать так, чтобы они были проекциями точек, лежащих в этой плоскости.

На рис. 71 даны проекции прямоугольника, лежащего в плоскости, перпендикулярной к горизонтальной плоскости проекций, имеющего две вертикальные стороны.

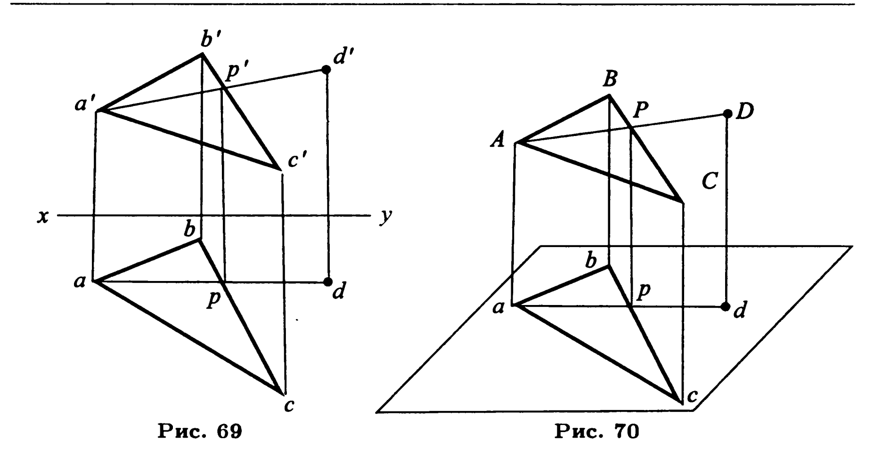


Рис. 69 **Рис. 70**

На рис. 72 представлено построение проекций шестиугольника, причем горизонтальные проекции a, b, c, d, f его вершин взяты произвольно.

Рис. 71 **Рис. 72**

Вертикальные проекции a', b', c' выбраны на перпендикулярах к оси проекций, проведенных через точки a, b, c. При этом точку a' можно брать где угодно на перпендикуляре к оси проекций, проведенном через a, точку b' — где угодно на перпендикуляре к оси, проведенном через b, и точку c' — где угодно на перпендикуляре к оси, проведенном через c. Вертикальные проекции остальных вершин можно построить, применяя способ, указанный в § 64.

11—1568

Соединив точки a, b и c, получим горизонтальные проекции двух сторон шестиугольника (ab и bc) и одной его диагонали (ac). Соединив точки a', b' и c', получим вертикальные проекции тех же сторон ($a'b'$ и $b'c'$) и той же диагонали ($a'c'$). Соединим после этого точку b с горизонтальными проекциями d, e и f остальных вершин шестиугольника. Точки пересечения прямых bd, be и bf с прямой ac обозначим соответственно через p, q и r. Проведя через точки p, q и r прямые, перпендикулярные к оси проекций, продолжим их до пересечения с прямой $a'c'$, тогда мы получим на этой прямой вертикальные проекции p', q' и r' точек пересечения трех диагоналей шестиугольника с четвертой, для которой вертикальной проекцией служит прямая $a'c'$. Вертикальные проекции этих трех диагоналей мы получим, соединяя точки p', q' и r' с точкой b. Если теперь продолжить прямую $b'p'$, а через точку d провести прямую, перпендикулярную к оси проекций, до пересечения с прямой $b'p'$, то точка пересечения этих прямых d' будет служить вертикальной проекцией четвертой вершины шестиугольника. Таким же образом, продолжая прямые $b'q'$ и $b'r'$ и опуская из точек e и f перпендикуляры на ось проекций, найдем вертикальные проекции e' и f' пятой и шестой вершин шестиугольника. Соединив последовательно точки a', b', c', d', e', f', получим искомую вертикальную проекцию шестиугольника.

66. Замечание. Метод изображения фигур и тел в ортогональных проекциях на две плоскости был разработан французским ученым Гаспаром Монжем (1745–1818). Гаспар Монж был крупнейшим французским геометром конца XVIII и начала XIX в. Во время французской революции был одним из основателей знаменитой политехнической школы, созданной конвентом. Метод Монжа в настоящее время является одним из основных в той области геометрии, которая разрабатывает методы изображения геометрических тел на плоскости и носит название **начертательной геометрии.** Метод Монжа имеет широкое применение в технике при вычерчивании проектов сооружений, планов зданий, частей у деталей машин и т. д. При этом методе построения на эпюре выполняются иногда по сложным правилам, пользоваться которыми можно, лишь хорошо усвоив главные факты и предложения стереометрии. Поэтому в учебниках геометрии, как и в настоящей книге, при изображении геометрических фигур и тел применяются упрощенные рисунки.

Эти рисунки представляют собой проекции изучаемых фигур, но не на две плоскости, а лишь на одну, именно на плоскость рисунка.

Как следует из всего предыдущего, одна такая проекция еще не определяет ни положения фигуры в пространстве, ни ее точных размеров, но она дает ясное представление о виде изучаемой фигуры. Этого представления достаточно, чтобы, основываясь на общих теоремах стереометрии, изучать свойства геометрических фигур и тел.

Глава III

МНОГОГРАННИКИ

1. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД И ПИРАМИДА

67. Многогранник. Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называются **ребрами** многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его **гранями**. Грани многогранника, сходящиеся в одной точке, образуют многогранный угол; вершины таких многогранных углов называются **вершинами многогранника**. Прямые, соединяющие две какие-нибудь вершины, не лежащие на одной грани, называются диагоналями многогранника.

Мы будем рассматривать только выпуклые многогранники, т. е. такие, которые расположены по одну сторону от плоскости каждой из его граней.

Наименьшее число граней в многограннике — четыре; такой многогранник получается от пересечения трехгранного угла какой-нибудь плоскостью.

68. Призма. Призмой называется многогранник, у которого две грани — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани — параллелограммы.

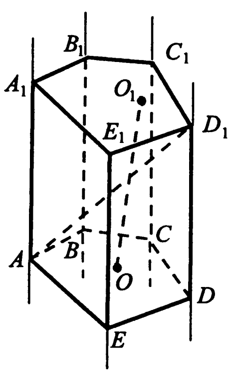


Рис. 73

Чтобы показать возможность существования такого многогранника, возьмем (рис. 73) какой-нибудь многоугольник $ABCDE$ и через его вершины проведем ряд параллельных прямых, не лежащих в его плоскости. Взяв затем на одной из этих прямых произвольную точку A_1, проведем через нее плоскость, параллельную плоскости $ABCDE$; через каждые две соседние параллельные прямые также проведем плоскости. Пересечение всех этих плоскостей определит многогранник $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$, удовлетворяющий определению призмы. Действительно, параллельные плоскости $ABCDE$ и $A_lB_1C_1D_1$

пересекаются боковыми плоскостями по параллельным прямым (§ 16); поэтому фигуры AA_1E_1E, EE_1D_1D и т. д. — параллелограммы. С другой стороны, у многоугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1$ равны соответственно стороны (как противоположные стороны параллелограммов) и углы (как углы с параллельными и одинаково направленными сторонами); следовательно, эти многоугольники равны.

Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** призмы, перпендикуляр OO_1, опущенный из какой-нибудь точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы. Параллелограммы AA_1B_1B, BB_1C_1C и т. д. называются **боковыми гранями** призмы, а их стороны AA_1, BB_1 и т. д., соединяющие соответственные вершины оснований, — **боковыми ребрами**. У призмы все боковые ребра равны как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями.

Отрезок прямой, соединяющий какие-нибудь две вершины, не прилежащие к одной грани, называется диагональю призмы. Таков, например, отрезок AD_1 (рис. 73).

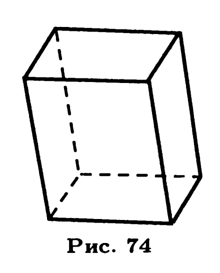
Плоскость, проведенная через какие-нибудь два боковых ребра, не прилежащих к одной боковой грани призмы (например, через ребра AA_1 и CC_1, рис. 73), называется диагональной плоскостью (на рисунке не показанной).

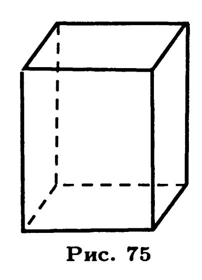
Призма называется **прямой** или **наклонной**, смотря по тому, будут ли ее боковые ребра перпендикулярны или наклонны к основаниям. У прямой призмы боковые грани — прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

Прямая призма называется **правильной**, если ее основания — правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани — равные прямоугольники.

Призмы бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием: треугольник, четырехугольники т. д.

69. Параллелепипед. Параллелепипедом называют призму, у которой основаниями служат параллелограммы (рис. 74). Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть прямые и наклонные. Прямой параллелепипед называется **прямоугольным**, если его основание — прямоугольник (рис.75). Из этих определений следует:


Рис. 74


Рис. 75

1) у параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы;

2) у прямого параллелепипеда четыре боковые грани — прямоугольники, а два основания — параллелограммы;

3) у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся к одной вершине, называются его **измерениями**; одно из них можно рассматривать как длину, другое — как ширину, а третье — как высоту.

Прямоугольный параллелепипед, имеющий равные измерения, называется кубом. У куба все грани — квадраты.

70. Пирамида. Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми, — треугольники, имеющие общую вершину.

Чтобы получить пирамиду, достаточно какой-нибудь многогранный угол S (рис. 76) пересечь произвольной плоскостью $ABCD$ и взять отсеченную часть $SABCD$.

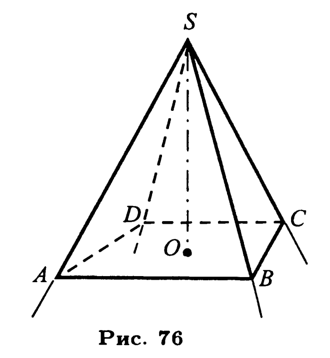


Рис. 76

Общая вершина S боковых треугольников называется **вершиной** пирамиды, а перпендикуляр SO, опущенный из вершины на плоскость основания, — **высотой**.

Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишут сначала ту, которой обозначена вершина, например $SABCD$ (рис. 76).

Плоскость, проведенная через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания (например, через диагональ BD, рис. 78), называется **диагональной плоскостью**.

Пирамиды бывают треугольные, четырехугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием — треугольник, четырехугольник и т. д. Треугольная пирамида (рис. 77) называется иначе **тетраэдром**; все четыре грани у такой пирамиды — треугольники.

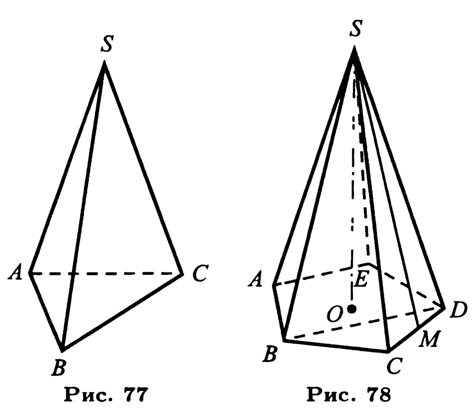


Рис. 77 **Рис. 78**

Пирамида называется **правильной** (рис. 78), если, во-первых, ее основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые ребра равны между собой (как наклонные с равными проекциями).

Поэтому все боковые грани правильной пирамиды суть равные равнобедренные треугольники. Высота SM (рис. 78) каждого из этих треугольников называется апофемой. Все апофемы в правильной пирамиде равны.

71. Усеченная пирамида. Часть пирамиды (рис. 79), заключенная между основанием ($ABCDE$) и секущей плоскостью ($A_1B_1C_1D_1E_1$), параллельной основанию, называется **усеченной пирамидой**. Параллельные грани называются **основаниями**, а отрезок перпендикуляра OO_1, опущенного из какой-нибудь точки O_1 основания $A_1B_1C_1D_1E_1$ на другое основание, — **высотой** усеченной пирамиды. Усеченная пирамида называется **правильной**, если она составляет часть правильной пирамиды.

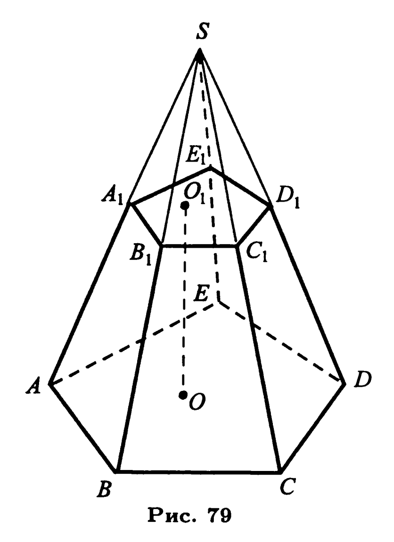


Рис. 79

Свойства граней и диагоналей параллелепипеда

72. Теорема. ***В параллелепипеде:***

1) ***противоположные грани равны и параллельны;***

2) ***все четыре диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.***

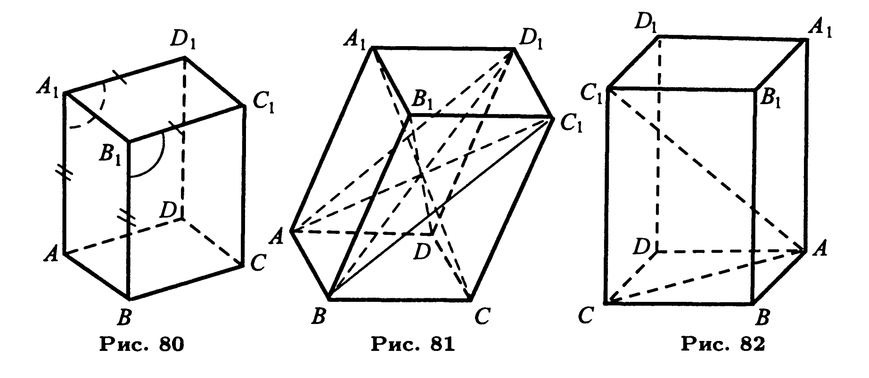


Рис. 80 **Рис. 81** **Рис. 82**

1) Грани (рис. 80) BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, потому что две пересекающиеся прямые BB_1 и B_1C_1 одной грани параллельны двум пересекающимся прямым AA_1 и A_1D_1 другой (§ 15); эти грани и равны, так как $B_1C_1 = A_1D_1$, $B_1B = A_1A$ (как противоположные стороны параллелограммов) и $\angle BB_1C_1 = \angle AA_1D_1$.

2) Возьмем (рис. 81) какие-нибудь две диагонали, например AC_1 и BD_1, и проведем вспомогательные прямые AD_1 и BC_1. Так как ребра AB и D_1C_1 соответственно равны и параллельны ребру DC, то они равны и параллельны между собой; вследствие этого фигура AD_1C_1B есть параллелограмм, в котором прямые C_1A и BD_1 — диагонали, а в параллелограмме диагонали делятся в точке пересечения пополам. Возьмем теперь одну из этих диагоналей, например AC_1, с третьей диагональю, положим, с B_1D. Совершенно так же мы можем доказать, что они делятся в точке пересечения пополам. Следовательно, диагонали B_1D и AC_1 и диагонали AC_1 и BD_1 (которые мы раньше брали) пересекаются в одной и той же точке, именно в середине диагонали AC_1. Наконец, взяв эту же диагональ AC_1 с четвертой диагональю A_1C, мы также докажем, что они делятся пополам. Значит, точка пересечения и этой пары диагоналей лежит в середине диагонали AC_1. Таким образом, все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной и той же точке и делятся этой точкой пополам.

73. Теорема. ***В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали*** (AC_1, рис. 82) ***равен сумме квадратов трех его измерений.***

Проведя диагональ основания AC, получим треугольники AC_1C и ACB. Оба они прямоугольные: первый потому, что параллелепипед прямой и, следовательно, ребро CC_1 перпендикулярно к основанию; второй потому, что параллелепипед прямоугольный и, значит, в основании его лежит прямоугольник. Из этих треугольников находим:

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 \quad \text{и} \quad AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Следовательно,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

Следствие. *В прямоугольном параллелепипеде все диагонали равны.*

Свойства параллельных сечений в пирамиде

74. Теоремы. ***Если пирамида*** (рис. 83) ***пересечена плоскостью, параллельной основанию, то***:

1) ***боковые ребра и высота делятся этой плоскостью на пропорциональные части***;

2) ***в сечении получается многоугольник*** ($abcde$), ***подобный основанию***;

3) ***площади сечения и основания относятся, как квадраты их расстояний от вершины.***

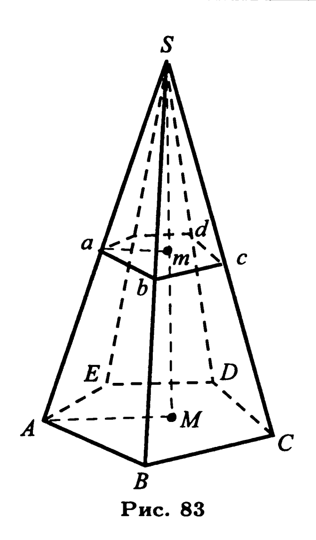


Рис. 83

1) Прямые ab и AB можно рассматривать как линии пересечения двух параллельных плоскостей (основания и секущей) третьей плоскостью ASB; поэтому $ab \| AB$ (§ 16). По этой же причине $bc \| BC$, $cd \| CD \ldots$ и $am \| AM$; вследствие этого

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \frac{Sc}{cC} = \ldots = \frac{Sm}{mM}.$$

2) Из подобия треугольников ASB и aSb, затем BSC и bSc и т. д. выводим:

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BS}{bS}; \quad \frac{BS}{bS} = \frac{BC}{bc},$$

откуда

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

Так же

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CS}{cS}; \quad \frac{CS}{cS} = \frac{CD}{cd}, \quad \text{откуда} \quad \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}.$$

Так же докажем пропорциональность остальных сторон многоугольников $ABCDE$ и $abcde$. Так как, сверх того, у этих многоугольников равны соответственные углы (как образованные параллельными и одинаково направленными сторонами), то они подобны. Площади подобных многоугольников относятся, как квадраты сходственных сторон; поэтому

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \frac{AB^2}{ab^2} = \left(\frac{AB}{ab}\right)^2,$$

но

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AS}{aS} = \frac{MS}{mS},$$

значит

$$\frac{\text{площадь } ABCDE}{\text{площадь } abcde} = \left(\frac{MS}{mS}\right)^2 = \frac{MS^2}{mS^2}.$$

75. Следствие. *У правильной усеченной пирамиды верхнее основание есть правильный многоугольник, подобный нижнему основанию, а боковые грани суть равные и равнобочные трапеции* (рис. 83).

Высота любой из этих трапеций называется апофемой правильной усеченной пирамиды.

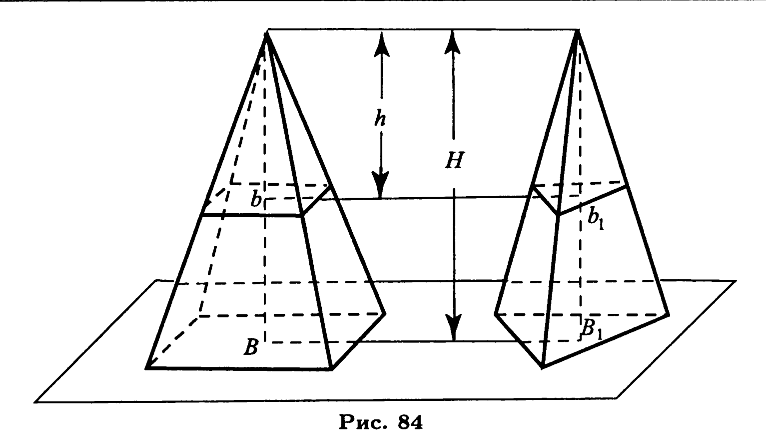


Рис. 84

76. Теорема. ***Если две пирамиды с равными высотами рассечены на одинаковом расстоянии от вершины плоскостями, параллельными основаниям, то площади сечений пропорциональны площадям оснований.*** Пусть (рис. 84) B и B_1 — площади оснований двух пирамид, H — высота каждой из них, b и b_1 — площади сечений плоскостями, параллельными основаниям и удаленными от вершин на одно и то же расстояние h.

Согласно предыдущей теореме мы будем иметь:

$$\frac{b}{B} = \frac{h^2}{H^2} \quad \text{и} \quad \frac{b_1}{B_1} = \frac{h^2}{H^2},$$

откуда

$$\frac{b}{B} = \frac{b_1}{B_1} \quad \text{или} \quad \frac{b}{b_1} = \frac{B}{B_1}.$$

77. Следствие. Если $B = B_1$, то и $b = b_1$, т. е. *если у двух пирамид с равными высотами основания равновелики, то равновелики и сечения, равноотстоящие от вершины.*

Боковая поверхность призмы и пирамиды*)

78. Теорема. ***Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.***

Перпендикулярным сечением (рис. 85) называется многоугольник *abcde*, получаемый от пересечения призмы плоскостью, перпендикулярной к боковому ребру. Стороны этого многоугольника перпендикулярны к ребрам (§§ 31, 24).

*) В §§78–81, а также и в дальнейшем ради краткости термин “боковая поверхность” употребляется вместо “площадь боковой поверхности”.

Боковая поверхность призмы представляет собой сумму площадей параллелограммов; в каждом из них за основание можно взять боковое ребро, а за высоту — сторону перпендикулярного сечения. Поэтому боковая поверхность призмы равна: $AA_1 \cdot ab + BB_1 \cdot bc + CC_1 \cdot cd + DD_1 \cdot de + EE_1 \cdot ea = (ab + bc + cd + de + ea) \cdot AA_1$.

79. Следствие. *Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту* потому, что в такой призме за перпендикулярное сечение можно взять само основание, а боковое ребро ее равно высоте.

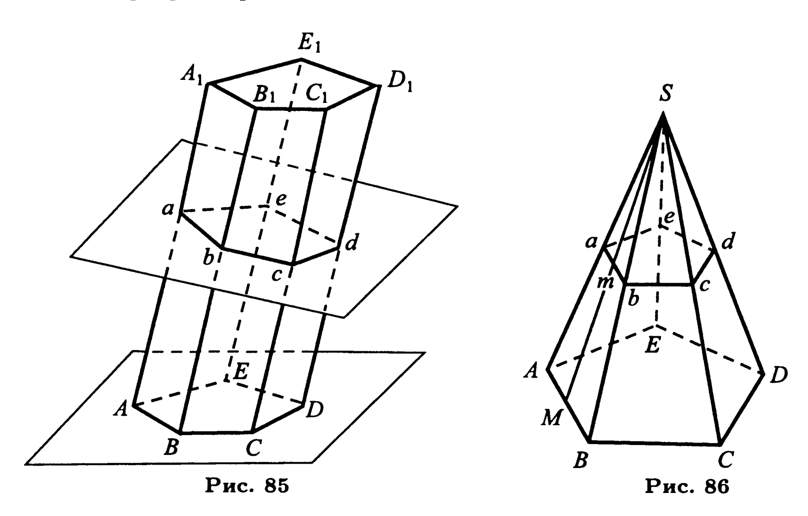


Рис. 85 Рис. 86

80. Теорема. ***Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.***

Пусть (рис. 86) $SABCDE$ — правильная пирамида и SM — ее апофема. Боковая поверхность этой пирамиды есть сумма площадей равных равнобедренных треугольников. Площадь одного из них, например ASB, равна $AB \cdot \frac{1}{2} SM$. Если всех треугольников n, то боковая поверхность равна $AB \cdot \frac{1}{2} SM \cdot n = AB \cdot n \cdot \frac{1}{2} SM$, где $AB \cdot n$ есть периметр основания, а SM — апофема.

81. Теорема. ***Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему.***

Боковая поверхность правильной усеченной пирамиды есть сумма площадей равных трапеций. Площадь одной трапеции, например $AabB$ (рис. 86), равна $\frac{1}{2}(AB + ab) \cdot Mm$. Если число всех трапеций есть n, то боковая поверхность равна:

$$\frac{AB + ab}{2} \cdot Mm \cdot n = \frac{AB \cdot n + ab \cdot n}{2} \cdot Mm,$$

где $AB \cdot n$ и $ab \cdot n$ суть периметры нижнего и верхнего оснований.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Высота прямой призмы, основание которой есть правильный треугольник, равна 12 м, сторона основания 3 м. Вычислить полную поверхность призмы.

2. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1714 м^2, а неравные стороны основания равны 25 м и 14 м. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

3. В прямоугольном параллелепипеде с квадратным основанием и высотой h проведена секущая плоскость через два противоположных боковых ребра. Вычислить полную поверхность параллелепипеда, зная, что площадь сечения равна S.

4. Правильная шестиугольная пирамида имеет сторону основания a и высоту h. Вычислить боковое ребро, апофему, боковую поверхность и полную поверхность.

5. Вычислить полную поверхность и высоту треугольной пирамиды, у которой каждое ребро равно a.

6. Правильная шестиугольная пирамида, у которой высота 25 см, а сторона основания 5 см, рассечена плоскостью, параллельной основанию. Вычислить расстояние этой плоскости от вершины пирамиды, зная, что площадь сечения равна $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ см^2.

7. Высота усеченной пирамиды с квадратным основанием равна h, сторона нижнего основания a, а верхнего b. Найти полную поверхность усеченной пирамиды.

8. Высота усеченной пирамиды равна 6, а площади оснований 18 и 8. Пирамида рассечена плоскостью, параллельной основаниям и делящей высоту пополам. Вычислить площадь сечения.

2. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ

82. Основные допущения в объемах. Величина части пространства, занимаемого геометрическим телом, называется **объемом** этого тела.

Мы ставим задачу — найти для этой величины выражение в виде некоторого числа, измеряющего эту величину. При этом мы будем руководствоваться следующими исходными положениями.

1) *Равные тела имеют равные объемы.*

2) *Объем какого-нибудь тела* (например, каждого параллелепипеда, изображенного на рис. 87), *состоящего из частей* (P и Q), *равен* ***сумме объемов*** *этих частей.*

Два тела, имеющие одинаковые объемы, называются равновеликими.

83. Единица объема. За единицу объемов при измерении их берут объем такого куба, у которого каждое ребро равно линейной единице. Так, употребительны кубические метры (м^3), кубические сантиметры (см^3) и т. д.

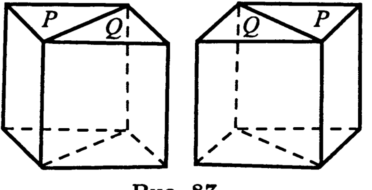


Рис. 87

Объем параллелепипеда

84. Теорема. ***Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.***

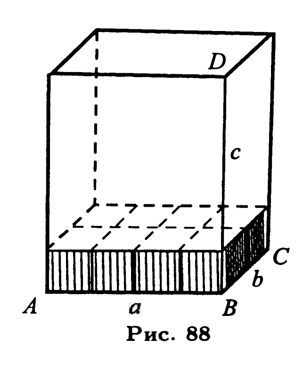


Рис. 88

В таком кратком выражении теорему эту надо понимать так: число, выражающее объем прямоугольного параллелепипеда в кубической единице, равно произведению чисел, выражающих три его измерения в соответствующей линейной единице, т. е. в единице, являющейся ребром куба, объем которого принят за кубическую единицу. Так, если x есть число, выражающее объем прямоугольного параллелепипеда в кубических сантиметрах, и a, b и c — числа, выражающие три его измерения в линейных сантиметрах, то теорема утверждает, что $x = abc$.

При доказательстве рассмотрим особо следующие три случая:

1) Измерения выражаются целыми числами.

Пусть, например, измерения, будут (рис. 88) $AB = a$, $BC = b$ и $BD = c$, где a, b и c — какие-нибудь целые числа (например, как изображено у нас на рисунке: $a = 4$, $b = 2$ и $c = 5$). Тогда основание параллелепипеда содержит ab таких квадратов, из которых каждый представляет собой соответствующую квадратную единицу. На каждом из этих квадратов, очевидно, можно поместить по одной кубической единице. Тогда получится слой (изображенный на рисунке), состоящий из ab кубических единиц. Так как высота этого слоя равна одной линейной единице, а высота всего параллелепипеда содержит c таких единиц, то внутри параллелепипеда можно поместить c таких слоев. Следовательно, объем этого параллелепипеда равен abc кубических единиц.

2) Измерения выражаются дробными числами.

Пусть измерения параллелепипеда будут:

$$\frac{m}{n}, \quad \frac{p}{q}, \quad \frac{r}{s}$$

(некоторые из этих дробей могут равняться целому числу). Приведя дроби к одинаковому знаменателю, будем иметь:

$$\frac{mqs}{nqs}, \quad \frac{pns}{qns}, \quad \frac{rnq}{snq}.$$

Примем $\frac{1}{nqs}$ долю линейной единицы за новую (вспомогательную) единицу длины. Тогда в этой новой единице измерения данного параллелепипеда выразятся целыми числами, а именно:

$$(mqs) \cdot (pns) \cdot (rnq),$$

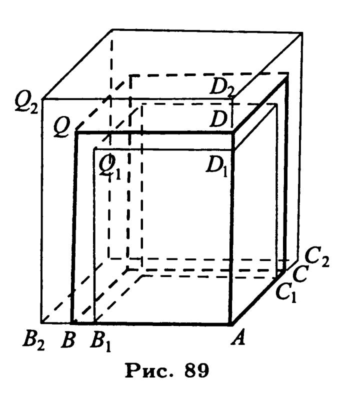


Рис. 89

и потому по доказанному (в случае 1) объем параллелепипеда равен произведению $(mgs) \cdot (pns) \cdot (rnq)$, если измерять этот объем новой кубической единицей, соответствующей новой линейной единице. Таких кубических единиц в одной кубической единице, соответствующей прежней линейной единице, содержится $(nqs)^3$; значит, новая кубическая единица составляет $\frac{1}{(nqs)^3}$ прежней. Поэтому объем параллелепипеда, выраженный в прежних единицах, равен

$$\frac{1}{(nqs)^3} \cdot (mqs)(pns)(rnq) = \frac{mqs}{nqs} \cdot \frac{pns}{nqs} \cdot \frac{rnq}{nqs} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}.$$

3) Измерения выражаются иррациональными числами. Пусть у данного параллелепипеда (рис. 89), который для краткости мы обозначим одной буквой Q, измерения будут:

$$AB = \alpha; \quad AC = \beta; \quad AD = \gamma,$$

где все числа α, β и γ или только некоторые из них иррациональные.

Каждое из чисел α, β и γ может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби. Возьмем приближенные значения этих дробей с n десятичными знаками сначала с недостатком, а затем с избытком. Значения с недостатком обозначим α_n, β_n, γ_n, значения с избытком α'_n, β'_n, γ'_n. Отложим на ребре AB, начиная от точки A, два отрезка $AB_1 = \alpha_n$ и $AB_2 = \alpha'_n$. На ребре AC от той же точки A отложим отрезки $AC_1 = \beta_n$ и $AC_2 = \beta_n$ и на ребре AD от той же точки — отрезки $AD_1 = \gamma_n$ и $AD_2 = \gamma'_n$. При этом мы будем иметь

$$AB_1 < AB < AB_2; \quad AC_1 < AC < AC_2; \quad AD_1 < AD < AD_2.$$

Построим теперь два вспомогательных параллелепипеда: один (обозначим его Q_1) с измерениями AB_1, AC_1 и AD_1 и другой (обозначим его AD_2 с измерениями AB_2, AC_2 и AD_2. Параллелепипед Q_1 будет весь помещаться внутри параллелепипеда Q, а параллелепипед Q_2 будет содержать внутри себя параллелепипед Q.

По доказанному (в случае 2) будем иметь:

$$\text{объем } Q_1 = \alpha_n \beta_n \gamma_n, \quad (1)$$

$$\text{объем } Q_2 = \alpha'_n \beta'_n \gamma'_n, \quad (2)$$

причем объем $Q_1 <$ объема Q_2.

Начнем теперь увеличивать число n. Это значит, что мы берем приближенные значения чисел α, β, γ все с большей и большей степенью точности. Посмотрим, как при этом изменяются объемы параллелепипедов Q_1 и Q_2.

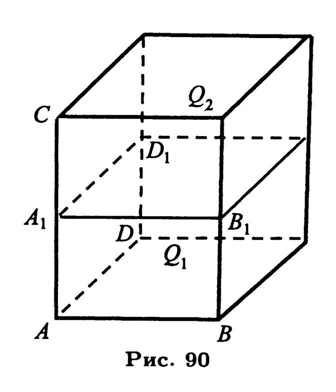


Рис. 90

При неограниченном возрастании n объем Q_1, очевидно, увеличивается и в силу равенства (1) при беспредельном увеличении n имеет своим пределом предел произведения $(\alpha_n \beta_n \gamma_n)$. Объем Q_2, очевидно, уменьшается и в силу равенства (2) имеет пределом предел произведения $(\alpha'_n \beta'_n \gamma'_n)$. Но из алгебры известно, что оба произведения $\alpha_n \beta_n \gamma_n$ и $\alpha'_n \beta'_n \gamma'_n$ при неограниченном увеличении n имеют общий предел, который является произведением иррациональных чисел $\alpha\beta\gamma$.

Этот предел мы и принимаем за меру объема параллелепипеда Q: объем $Q = \alpha\beta\gamma$. Можно доказать, что определенный таким образом объем удовлетворяет тем условиям, которые установлены для объема (§ 82). В самом деле, при таком определении объема равные параллелепипеды, очевидно, имеют равные объемы. Следовательно, первое условие (§ 82) выполняется. Разобьем теперь данный параллелепипед Q плоскостью, параллельной его основанию, надвое: Q_1 и Q_2 (рис. 90). Тогда будем иметь:

$$\text{объем } Q = AB \cdot AC \cdot AD,$$

$$\text{объем } Q_1 = AB \cdot AA_1 \cdot AD,$$

$$\text{объем } Q_2 = A_1B_1 \cdot A_1C \cdot A_1D_1.$$

Складывая почленно два последних равенства и замечая, что $A_1B_1 = AB$ и $A_1D_1 = AD$, получим:

$$\text{объем } Q_1 + \text{объем } Q_2 = AB \cdot AA_1 \cdot AD + AB \cdot A_1C \cdot AD = \\ = AB \cdot AD(AA_1 + A_1C) = AB \cdot AD \cdot AC,$$

отсюда получаем:

$$\text{объем } Q_1 + \text{ объем } Q_2 = \text{ объему } Q.$$

Следовательно, и второе условие § 82 тоже выполняется, если параллелепипед складывать из двух частей, полученных разрезанием его плоскостью, параллельной одной из граней.

85. Следствие. Пусть измерения прямоугольного параллелепипеда, служащие сторонами его основания, выражаются числами a и b, а третье измерение (высота) — числом c. Тогда, обозначая объем его в соответствующих кубических единицах буквой V, можем написать

$$V = abc.$$

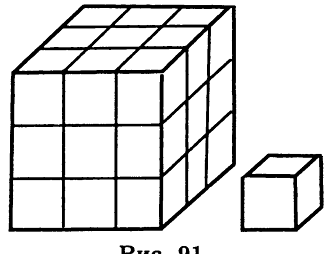


Рис. 91

Так как произведение ab выражает площадь основания, то можно сказать, что ***объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

Замечание. Отношение двух кубических единиц разных названий равно третьей степени отношения тех линейных единиц, которые служат ребрами для этих кубических единиц. Так, отношение кубического метра к кубическому дециметру равно 10^3, т. е. 1000. Поэтому, например, если мы имеем куб с ребром длиной a линейных единиц и другой куб с ребром длиной $3a$ линейных единиц, то отношение их объемов будет равно 3^3, т. е. 27, что ясно видно из рис. 91.

86. Лемма. *Наклонная призма равновелика такой прямой призме, основание которой равно перпендикулярному сечению наклонной призмы, а высота — ее боковому ребру.*

Пусть дана наклонная призма $ABCDEA_1B_1D_1E_1$ (рис. 92). Продолжим все ее боковые ребра и боковые грани в одном направлении.

Возьмем на продолжении одного какого-нибудь ребра произвольную точку a и проведем через нее перпендикулярное сечение $abcde$. Затем, отложив $aa_1 = AA_1$, проведем через a_1 перпендикулярное сечение $a_1b_1c_1d_1e_1$. Так как плоскости обоих сечений параллельны, то $bb_1 = cc_1 = dd_1 = ee_1 = aa_1 = AA_1$ (§ 17). Вследствие этого многогранник a_1d, у которого за основания приняты проведенные нами сечения, есть прямая призма, о которой говорится в теореме. Докажем, что данная наклонная призма равновелика этой прямой. Для этого предварительно убедимся, что многогранники aD и a_1D_1 равны. Основания их $abcde$ и $a_1b_1c_1d_1e_1$ равны как основание призмы a_1d; с другой стороны, прибавив к обеим частям равенства $A_1A = a_1a$ по одному и тому же отрезку прямой A_1a, получим $aA = a_1A_1$, подобно этому $bB = b_1B_1$, $cC = c_1C_1$ и т. д. Вообразим теперь, что многогранник aD вложен в многогранник a_1D_1 так, что основания их совпали; тогда боковые ребра, будучи перпендикулярны к основаниям и соответственно равны, также совпадут; поэтому многогранник aD совместится с многогранником a_1D_1; значит, эти тела равны.

Теперь заметим, что если к прямой призме a_1d добавим многогранник aD, а к наклонной призме A_1D добавим многогранник a_1D_1, равный aD, то получим один и тот же многогранник a_1D. Из этого следует, что две призмы A_1D и a_1d равновелики.

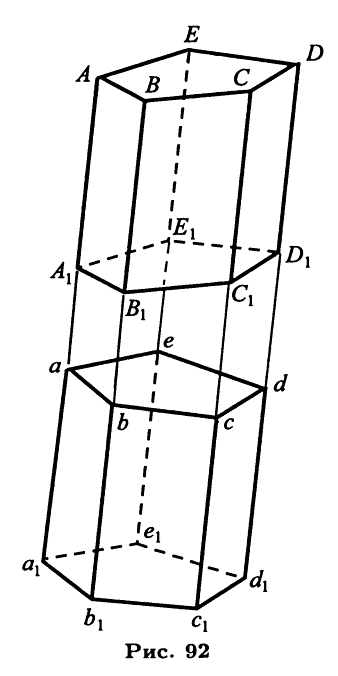


Рис. 92

87. Теорема. ***Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.***

Ранее мы доказали эту теорему для параллелепипеда прямоугольного, теперь докажем ее для параллелепипеда прямого, а потом и наклонного.

1) Пусть (рис. 93) AC_1 — прямой параллелепипед, т. е. такой, у которого основание $ABCD$ — какой-нибудь параллелограмм, а все боковые грани — прямоугольники. Возьмем в нем за основание боковую грань AA_1B_1B; тогда параллелепипед будет наклонный. Рассматривая его как частный случай наклонной призмы, мы на основании леммы предыдущего параграфа можем утверждать, что этот параллелепипед равновелик такому прямому параллелепипеду, у которого основание есть перпендикулярное сечение $MNPQ$, а высота BC. Четырехугольник $MNPQ$ — прямоугольник, потому что его углы служат линейными углами прямых двугранных углов; поэтому прямой параллелепипед, имеющий основанием прямоугольник $MNPQ$, должен быть прямоугольным и, следовательно, его объем равен произведению трех его измерений, за которые можно принять отрезки MN, MQ и BC. Таким образом,

$$\text{объем } AC_1 = MN \cdot MQ \cdot BC = MN \cdot (mQ \cdot BC).$$

Но произведение $mQ \cdot BC$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$, поэтому

$$\text{объем } AC_1 = (\text{площади } ABCD) \cdot MN = (\text{площади } ABCD) \cdot BB_1.$$

2) Пусть (рис. 94) AC_1 — наклонный параллелепипед. Он равновелик такому прямому, у которого основанием служит перпендикулярное сечение $MNPQ$ (т. е. перпендикулярное к ребрам $AD, BC, \ldots$), а высотой — ребро BC. Но, по доказанному, объем прямого параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту; значит,

$$\text{объем } AC_1 = (\text{площади } MNPQ) \cdot BC.$$

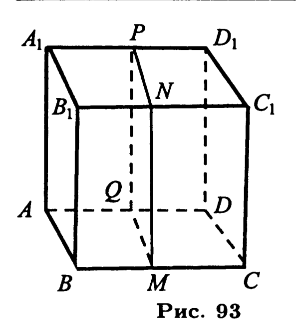


Рис. 93

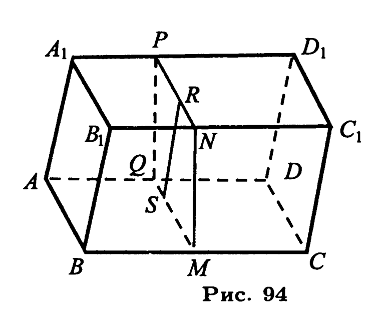


Рис. 94

Если RS есть высота сечения $MNPQ$, то площадь $MNPQ$ равна $MQ \cdot RS$, поэтому

$$\text{объем } AC_1 = MQ \cdot RS \cdot BC = (BC \cdot MQ) \cdot RS.$$

Произведение $BC \cdot MQ$ выражает площадь параллелограмма $ABCD$ следовательно, объем $AC_1 =$ (площади $ABCD) \cdot RS$.

Остается теперь доказать, что отрезок RS представляет собой высоту параллелепипеда. Действительно, сечение $MNPQ$, будучи перпендикулярно к ребрам $BC, B_1C_1 \ldots$, должно быть перпендикулярно к граням $ABCD$, $BB_1C_1C, \ldots$, проходящим через эти ребра (§ 43). Поэтому если мы из точки S восставим перпендикуляр к плоскости $ABCD$, то он должен лежать весь в плоскости $MNPQ$ (§ 44) и, следовательно, должен слиться с прямой SR, лежащей в этой плоскости и перпендикулярной к MQ. Значит, отрезок SR есть высота параллелепипеда. Таким образом, объем и наклонного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Следствие. Если V, B и H суть числа, выражающие в соответствующих единицах объем, площадь основания и высоту параллелепипеда, то можно написать:

$$V = BH.$$

Объем призмы

88. Теорема. ***Объем призмы равен произведению площади основания на высоту.***

Сначала докажем эту теорему для треугольной призмы, а потом и для многоугольной.

1) Проведем через ребро AA_1 треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 95) плоскость, параллельную грани BB_1C_1C, а через ребро CC_1 — плоскость, параллельную грани AA_1B_1B; затем продолжим плоскости обоих оснований призмы до пересечения с проведенными

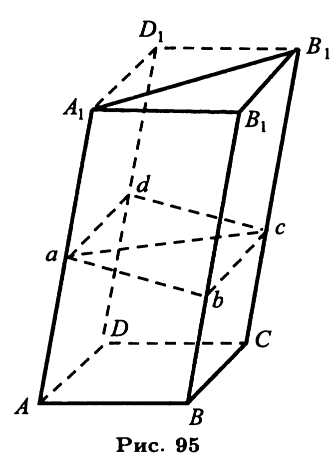


Рис. 95

плоскостями. Тогда мы получим параллелепипед BD_1, который диагональной плоскостью AA_1C_1C делится на две треугольные призмы (из них одна есть данная). Докажем, что эти призмы равновелики. Для этого проведем перпендикулярное сечение $abcd$. В сечении получится параллелограмм, который диагональю ac делится на два равных треугольника. Данная призма равновелика такой прямой призме, у которой основание есть $\triangle abc$, а высота — ребро AA_1 (§ 86). Другая треугольная призма равновелика такой прямой, у которой основание есть $\triangle adc$, а высота — ребро AA_1. Но две прямые призмы с равными основаниями и равными высотами равны (потому что при вложении они совмещаются), значит, призмы $ABCA_1B_1C_1$ и $ABCA_1D_1C_1$ равновелики. Из этого следует, что объем данной призмы составляет п о л о в и н у объема параллелепипеда BD_1; поэтому, обозначив высоту призмы через H, получим:

$$\text{объем треугольной призмы} = \frac{(\text{площади}ABCD)\cdot H}{2} =$$

$$= \frac{(\text{площади}ABCD)}{2}\cdot H = (\text{площади}ABC)\cdot H.$$

2) Проведем через ребро AA_1 многоугольной призмы (рис. 96) диагональные плоскости AA_1C_1C и AA_1D_1D. Тогда данная призма рассечется на несколько треугольных призм. Сумма объемов этих призм составляет искомый объем. Если обозначим площади их оснований через B_1, b_2, b_3, а общую высоту через H, то получим: объем многоугольной призмы $= b_1 \cdot H + b_2 \cdot H + b_3 \cdot H = (b_1 + b_2 + b_3)\cdot H =$ (площади $ABCDE$)$\cdot H$.

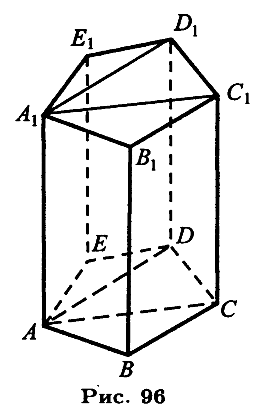


Рис. 96

С л е д с т в и е. Если V, B и H будут числа, выражающие в соответствующих единицах объем, площадь основания и высоту призмы, то, по доказанному, можно написать:

$$V = BH.$$

89. Принцип Кавальери. Итальянский математик XVII в. Кавальери высказал без доказательства следующее утверждение. *Если два тела* (ограниченные плоскостями или кривыми поверхностями — все равно)

могут быть помещены в такое положение, при котором всякая плоскость, параллельная какой-нибудь данной плоскости и пересекающая оба тела, дает в сечении с ними равновеликие фигуры, то объемы таких тел одинаковы.

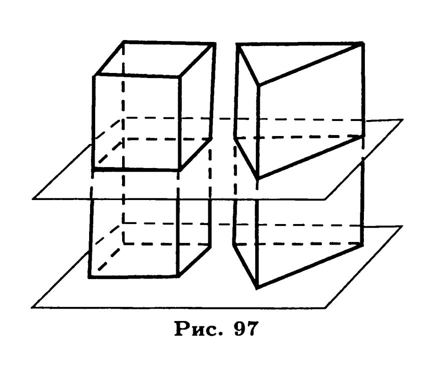


Рис. 97

Это предложение может быть строго доказано, но доказательство его выходит за пределы элементарной математики, и потому мы ограничимся проверкой его на отдельных примерах.

Условиям принципа Кавальери удовлетворяют, например, две прямые призмы (треугольные или многоугольные — все равно) с равновеликими основаниями и равными высотами (рис. 97). Такие призмы, как мы знаем, равновелики. Вместе с тем, если поставим такие призмы основаниями на какую-нибудь плоскость, то всякая плоскость, параллельная основаниям и пересекающая одну из призм, пересечет и другую, причем в сечениях получатся равновеликие фигуры, так как фигуры эти равны основаниям, а основания равновелики. Значит, принцип Кавальери подтверждается в этом частном случае. Принцип этот подтверждается также и в планиметрии в

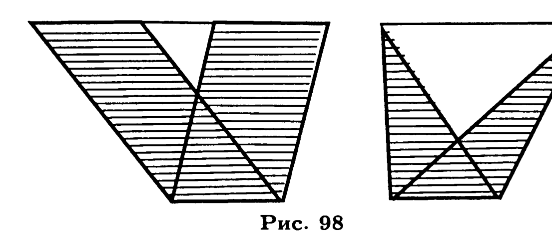


Рис. 98

применении к площадям, а именно: *если две фигуры могут быть помещены в такое положение, что всякая прямая, параллельная какой-нибудь данной прямой, пересекающая обе фигуры, дает в сечении с ними равные отрезки, то такие фигуры равновелики.* Примером могут служить два параллелограмма или два треугольника с равными основаниями и равными высотами (рис. 98).

Объем пирамиды

90. Лемма. ***Треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами равновелики.***

Доказательство наше будет состоять из трех частей. В первой части мы докажем равновеликость не самих пирамид, а вспомогательных тел, составленных из ряда треугольных призм, поставленных друг на друга. Во второй части мы докажем, что объемы этих вспо-

могательных тел при увеличении числа составляющих их призм приближаются к объемам пирамид как угодно близко. Наконец, в третьей части мы убедимся, что сами пирамиды должны быть равновелики.

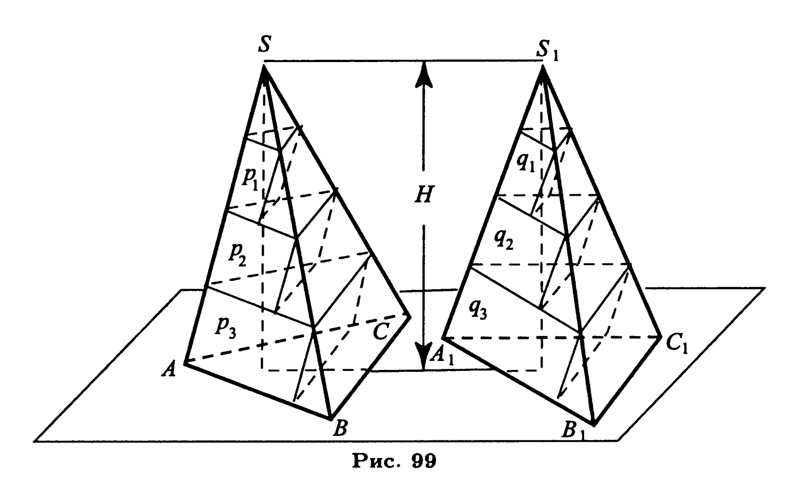


Рис. 99

I. Вообразим, что пирамиды поставлены основаниями на некоторую плоскость (как изображено на рис. 99), тогда их вершины будут находиться на одной прямой, параллельной плоскости оснований, и высота пирамид может быть изображена одним и тем же отрезком прямой H. Разделим эту высоту на какое-нибудь целое число n равных частей (например, на 4, как это указано на чертеже) и через точки деления проведем ряд плоскостей, параллельных плоскости оснований. Плоскости эти, пересекаясь с пирамидами, дают в сечениях ряд треугольников, причем треугольники пирамиды s будут равновелики соответствующим треугольникам пирамиды S_1 (§ 77). Поставим внутри каждой пирамиды ряд таких призм, чтобы верхними основаниями у них были треугольники сечений, боковые ребра были параллельны ребру SA в одной пирамиде и ребру S_1A_1 в другой, а высота каждой призмы равнялась бы $H/_n$. Таких призм в каждой пирамиде окажется $n-1$; они образуют собой некоторое ступенчатое тело, объем которого, очевидно, меньше объема той пирамиды, в которой призмы построены. Обозначим объемы призм пирамиды S по порядку, начиная от вершины буквами $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}$, а объемы призм пирамиды S_1 — также по порядку от вершины буквами $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$. Тогда, принимая во внимание, что у каждой пары соответствующих призм (у P_1 и q_1, у p_2 и q_2 и т. д.) основания равновелики и высоты равны, мы можем написать ряд равенств:

$$p_1 = q_1, \quad p_2 = q_2, \quad p_3 = q_3, \quad \ldots, \quad p_{n-1} = q_{n-1}.$$

Сложив все равенства почленно, найдем:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}. \qquad (1)$$

Мы доказали, таким образом, что объемы построенных нами вспомогательных ступенчатых тел равны между собой (при всяком числе n, на которое мы делим высоту H).

II. Обозначив объемы пирамид S и S_1 соответственно буквами V и V_1, положим, что

$$V - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) = x$$

и

$$V_1 - (q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1}) = y,$$

откуда

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} = V - x$$

и

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_{n-1} = V_1 - y.$$

Тогда равенство (1) мы можем записать так:

$$V - x = V_1 - y. \qquad (2)$$

Предположим теперь, что число n равных частей, на которое мы делим высоту H, неограниченно возрастает; например, предположим, что, вместо того чтобы делить высоту на 4 равные части, мы разделим ее на 8 равных частей, потом на 16, на 32 и т. д., и пусть каждый раз мы строим указанным образом ступенчатые тела в обеих пирамидах. Как бы ни возросло число призм, составляющих ступенчатые тела, равенство (1), а следовательно, и равенство (2) остаются в полной силе. При этом объемы V и V_1, конечно, не будут изменяться, тогда как величины x и y, показывающие, на сколько объемы пирамид превосходят объемы соответствующих ступенчатых тел, будут, очевидно, все более и более уменьшаться. Докажем, что величины x и y могут сделаться как угодно малы (другими словами, что они *стремятся к нулю*). Это достаточно доказать для какой-нибудь одной из двух величин x и y, например для x.

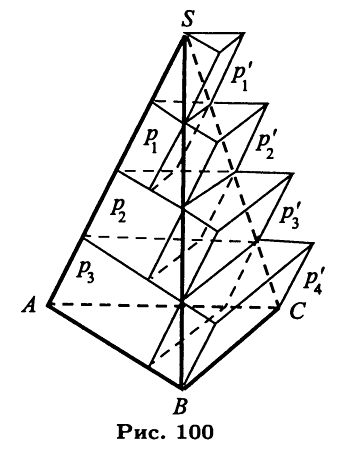


Рис. 100

С этой целью построим для пирамиды S (рис. 100) еще другой ряд призм, который составит тоже ступенчатое тело, но по объему большее пирамиды. Призмы эти мы построим так же, как строили

внутренние призмы, с той только разницей, что треугольники сечений мы теперь примем не за верхние основания призм, а за нижние. Вследствие этого мы получим теперь ряд призм, которые некоторой своей частью будут выступать из пирамид наружу, и потому они образуют новое ступенчатое тело с объемом, бо́льшим, чем объем пирамиды. Таких призм будет теперь не $n-1$, как внутренних призм, а n. Обозначим их объемы по порядку, начиная от вершины, буквами: $p'_1, p'_2, p'_3, \ldots, p'_n$. Рассматривая чертеж, мы легко заметим, что

$$p'_1 = p_1, \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = p_3, \ldots, \quad p'_{n-1} = p_{n-1}.$$

Поэтому

$$(p'_1 + p'_2 + P'_3 + \ldots + p'_{n-1} + p'_n) - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) = p'_n.$$

Так как

$$p'_1 + p'_2 + P'_3 + \ldots + p'_{n-1} + p'_n > V,$$

а

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} < V,$$

то

$$V - (p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}) < p'_n,$$

т. е.

$$x < p'_n.$$

Но $P'_n =$ площади $ABC \cdot \dfrac{H}{n}$ (если ABC есть основание); поэтому

$$x < (\text{площади} ABC) \cdot \frac{H}{n}.$$

При неограниченном возрастании числа n величина $\dfrac{H}{n}$, очевидно, может быть сделана как угодно малой (стремится к нулю). Поэтому и произведение $\left(\text{площадь } ABC \cdot \dfrac{H}{n}\right)$, в котором множимое не изменяется, а множитель стремится к нулю, тоже стремится к нулю, и так как положительная величина x меньше этого произведения, то она и подавно стремится к нулю.

То же самое рассуждение можно было бы повторить и о величине y.

Мы доказали, таким образом, что при неограниченном увеличении числа призм объемы вспомогательных ступенчатых тел приближаются к объемам соответствующих пирамид к а к у г о д н о б л и з к о.

III. Заметив это, возьмем написанное выше равенство (2) и придадим ему такой вид:

$$V - V_1 = x - y.$$

Докажем теперь, что это равенство возможно только тогда, когда $V = V_1$ и $x = y$. Действительно, разность $V - V_1$, как всякая

разность постоянных величин, должна равняться постоянной величине, разность же $x - y$, как всякая разность между переменными величинами, стремящимися к нулю, должна или равняться некоторой переменной величине (стремящейся к нулю), или равняться нулю. Так как постоянная величина не может равняться переменной, то из двух возможностей надо оставить только одну: разность $x - y = 0$; но тогда $V = V_1$ и $x = y$.

Мы доказали, таким образом, что рассматриваемые пирамиды равновелики*) .

Доказанная лемма очень просто выводится также из принципа Кавальери. Действительно, вообразим, что две пирамиды с равновеликими основаниями и разными высотами поставлены основаниями на какую-нибудь плоскость P (рис. 101), тогда всякая секущая плоскость Q, параллельная P, дает в сечении с пирамидами треугольники равновеликие (§ 77); следовательно, пирамиды эти удовлетворяют условиям принципа Кавальери, и потому объемы их должны быть одинаковы. Но это доказательство нельзя считать строгим, так как принцип Кавальери нами не был доказан.

91. Теорема. ***Объем пирамиды равен произведению площади ее основания на треть ее высоты.***

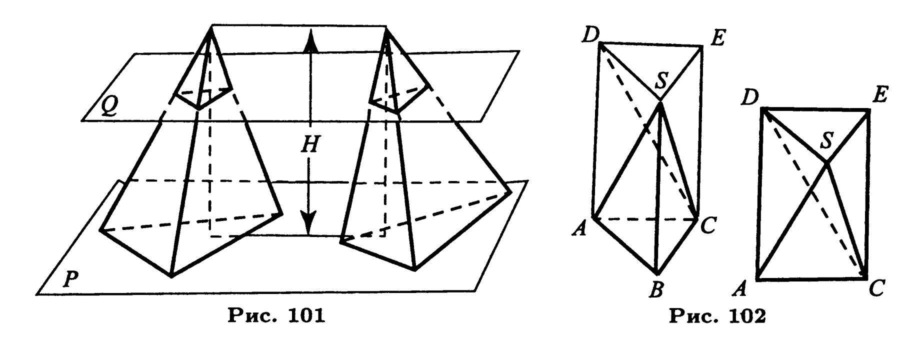


Рис. 101 **Рис. 102**

Сначала докажем эту теорему для пирамиды треугольной, а затем и многоугольной.

1) На основании треугольной пирамиды $SABC$ (рис. 102) построим такую призму $ABCDE$, у которой высота равна высоте пирамиды, а одно боковое ребро совпадает с ребром SB. Докажем, что объем пирамиды составляет третью часть объема этой призмы. Отделим от

---

*) Необходимость столь сложного доказательства этой теоремы объясняется тем фактом, что два равновеликих тела нельзя так легко преобразовывать одно в другое, как это можно было делать с равновеликими многоугольниками на плоскости. Именно, если даны два равновеликих многогранника, то в общем случае оказывается невозможным разбить один из них на такие части (даже при помощи дополнений), из которых можно было бы составить другой. В частности, это невозможно для двух произвольных треугольных пирамид с равновеликими основаниями и равными высотами.

призмы данную пирамиду. Тогда останется четырехугольная пирамида $SADEC$ (которая для ясности изображена отдельно). Проведем в ней секущую плоскость через вершину S и диагональ основания DC. Получившиеся от этого две треугольные пирамиды имеют общую вершину S и равные основания DEC и DAC, лежащие в одной плоскости; значит, согласно доказанной выше лемме пирамиды эти равновелики. Сравним одну из них, именно $SDEC$, с данной пирамидой. За основание пирамиды $SDEC$ можно взять $\triangle SDE$; тогда вершина ее будет в точке C и высота равна высоте данной пирамиды. Так как $\triangle SDE = \triangle ABC$, то согласно той же лемме пирамиды $SDEC$ и $SABC$ равновелики.

Призма $ABCDES$ нами разбита на три равновеликие пирамиды: $SABC$, $SDEC$ и $SDAC$. (Такому разбиению, очевидно, можно подвергнуть всякую треугольную призму. Это является одним из важных свойств треугольной призмы.) Таким образом, сумма объемов трех пирамид, равновеликих данной, составляет объем призмы; следовательно,

$$\text{объем } SABC = \frac{1}{3}\text{объема } SDEABC = \frac{(\text{площади } ABC)\cdot H}{3} = \\ = (\text{площади } \ ABC)\cdot\frac{H}{3},$$

где H есть высота пирамиды.

2) Через какую-нибудь вершину E (рис. 103) основания многоугольной пирамиды $SABCDE$ проведем диагонали EB и EC. Затем через ребро SE и каждую из этих диагоналей проведем секущие плоскости. Тогда многоугольная пирамида разобьется на несколько треугольных, имеющих высоту, общую с данной пирамидой. Обозначив площади оснований треугольных пирамид через b_1, b_2, b_3, высоту через H, будем иметь:

$$\text{объем } SABCDE = \frac{1}{3}b_1\cdot H + \frac{1}{3}b_2\cdot H + \frac{1}{3}b_3\cdot H = \\ = (b_1+b_2+b_3)\cdot\frac{H}{3} = (\text{площади } ABCDE)\cdot\frac{H}{3}.$$

С л е д с т в и е. Если V, B и H означают числа, выражающие в соответствующих единицах объем, площадь основания и высот какой угодно пирамиды, то

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

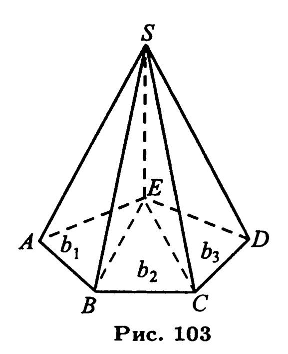


Рис. 103

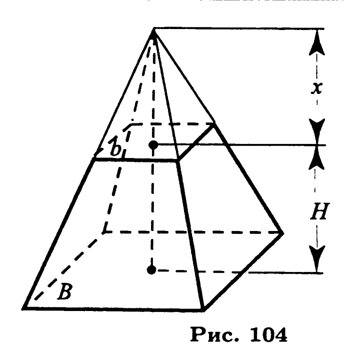


Рис. 104

92. Теорема. ***Объем усеченной пирамиды равен сумме объемов трех пирамид, имеющих высоту, одинаковую с высотой усеченной пирамиды, а основаниями: одна — нижнее основание данной пирамиды, другая — верхнее основание, а площадь основания третьей пирамиды равна среднему геометрическому площадей верхнего и нижнего оснований.***

Пусть площади оснований усеченной пирамиды (рис. 104) будут B и b, высота H и объем V (усеченная пирамида может быть треугольная или многоугольная — все равно). Требуется доказать, что

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}bH + \frac{1}{3}H\sqrt{Bb} = \frac{1}{3}H(B + b + \sqrt{Bb}),$$

где $\sqrt{Bb}$ есть среднее геометрическое между B и b. Для доказательства на меньшем основании поместим малую пирамиду, дополняющую данную усеченную пирамиду до полной. Тогда объем усеченной пирамиды V мы можем рассматривать как разность двух объемов полной пирамиды и верхней дополнительной.

Обозначив высоту дополнительной пирамиды буквой x, мы найдем, что

$$V = \frac{1}{3}B(H + x) - \frac{1}{3}bx = \frac{1}{3}(BH + Bx - bx) = \frac{1}{3}\left[BH + (B - b)x\right].$$

Для нахождения высоты x воспользуемся теоремой § 74, согласно которой мы можем написать уравнение:

$$\frac{B}{b} = \frac{(H + x)^2}{x^2}.$$

Для упрощения этого уравнения извлечем из обеих частей его арифметический квадратный корень:

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{H + x}{x}.$$

Из этого уравнения (которое можно рассматривать как пропорцию) получим:

$$x\sqrt{B} = H\sqrt{b} + x\sqrt{b},$$

откуда

$$(\sqrt{B} - \sqrt{b})x = H\sqrt{b}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{H\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}.$$

Подставив это выражение в формулу, выведенную нами для объема V, найдем:

$$V = \frac{1}{3}\left[BH + \frac{(B-b)H\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}\right].$$

Так как $B - b = (\sqrt{B} + \sqrt{b})(\sqrt{B} - \sqrt{b})$, то по сокращении дроби на разность $\sqrt{B} - \sqrt{b}$ получим:

$$V = \frac{1}{3}\left[BH + \left(\sqrt{B} + \sqrt{b}\right)H\sqrt{b}\right] + \frac{1}{3}\left(BH + H\sqrt{Bb} + bH\right) = \\ = \frac{1}{3}H\left(B + b + \sqrt{Bb}\right),$$

т. е. получим ту формулу, которую требовалось доказать.

3. ПОДОБИЕ МНОГОГРАННИКОВ

93. Определение. Два многогранника называются **подобными**, если они имеют соответственно равные многогранные углы и соответственно подобные грани. Соответственные элементы подобных многогранников называются **сходственными.**

Из этого определения следует, что в подобных многогранниках:

1) двугранные углы соответственно равны и одинаково расположены, потому что многогранные углы равны;

2) сходственные ребра пропорциональны, потому что в каждых двух подобных гранях отношение сходственных ребер одно и то же и в каждом многограннике соседние грани имеют по общему ребру. Возможность существования подобных многогранников доказывается следующей теоремой.

94. Теорема. ***Если в пирамиде проведем*** (рис. 105) ***секущую плоскость*** $(A_1B_1C_1D_1E_1)$ ***параллельно основанию, то отсечем от нее другую пирамиду*** $(SA_1B_1C_1D_1E_1)$, ***подобную данной.***

Так как $A_1B_1 \| AB$, $B_1C \| BC$ и т. д. то боковые грани двух пирамид подобны; основания их также подобны (§ 74). Остается доказать равенство многогранных углов.

Угол S у обеих пирамид общий; трехгранные углы $A_1, B_1, C_1, \ldots$ равны соответственно углам $A, B, C, \ldots$, потому что у каждой пары этих углов имеется по одному и тому же двугранному углу, расположенному между двумя соответственно равными и одинаково расположенными плоскими углами; так, у углов A и A_1 один и тот же двугранный угол (с ребром AS) лежит между равными плоскими углами: $SA_1E_1 = SAE$ и $SA_1B_1 = SAB$.

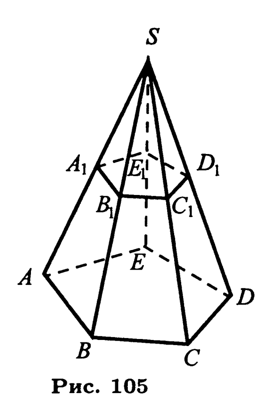


Рис. 105

95. Теорема. ***Поверхности подобных многогранников относятся, как квадраты сходственных ребер.***

Пусть $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ означают площади отдельных граней одного из подобных многогранников, а p_1, p_2, $p_3, \ldots, p_n$ — площади сходственных граней другого; положим еще, что L и l будут длины двух каких-нибудь сходственных ребер. Тогда вследствие подобия сходственных граней и пропорциональности всех сходственных ребер будем иметь:

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_2}{p_2} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \frac{P_3}{p_3} = \frac{L^2}{l^2}; \quad \ldots; \quad \frac{P_n}{p_n} = \frac{L^2}{l^2},$$

откуда по свойству ряда равных отношений получим:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n} = \frac{L^2}{l^2}.$$

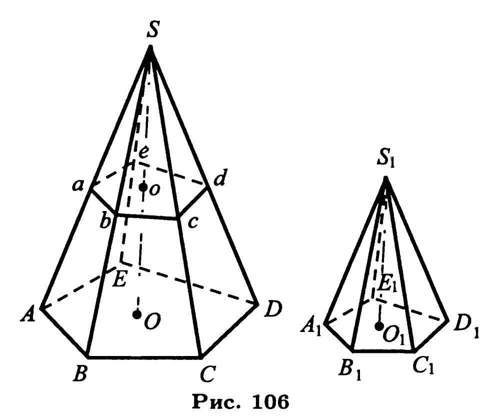


Рис. 106

96. Теорема. ***Объемы подобных многогранников относятся, как кубы сходственных ребер.***

Ограничимся доказательством этой теоремы только для подобных пирамид. Пусть (рис. 106) пирамиды $SABCDE$ и $S_1A_1B_1C_1D_1E_1$ подобны. Вложим вторую пирамиду в первую так, чтобы у них совпали равные многогранные углы S и S_1.

Тогда основание

$$A_1B_1C_1D_1E_1$$

займет некоторое положение $abcde$, причем стороны будут соответственно параллельны сторонам $AB, BC, \ldots$ (вследствие того, что соответствующие плоские углы трехгранных углов A и A_1, B и B_1 и т. д. равны). Поэтому плоскость $abcde$ параллельна $ABCDE$. Пусть SO и So — высоты двух пирамид. Тогда объем $ABCDE$ = (площади $ABCDE$) $\cdot \frac{1}{3}SO$; объем $abcde$ = (площади $abcde$) $\cdot \frac{1}{3}So$.

Следовательно,

$$\frac{\text{объем}\, SABCDE}{\text{объем}\, Sabcde} = \frac{\text{площадь}\, ABCDE}{\text{площадь}\, abcde} \cdot \frac{SO}{So},$$

но

$$\frac{\text{площадь}\, ABCDE}{\text{площадь}\, abcde} = \frac{SO^2}{So^2},$$

поэтому

$$\frac{\text{объем}\, SABCDE}{\text{объем}\, Sabcde} = \frac{SO^3}{So^3} = \frac{SA^3}{Sa^3}.$$

4. ПОНЯТИЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКАХ

Многогранник называется правильным, если все его грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны (таков, например, куб). Из этого определения следует, что в правильных многогранниках равны все плоские углы, все двугранные углы и все ребра.

97. Перечисление правильных многогранников. Примем во внимание, что в многогранном угле наименьшее число граней три, и что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $4d$ (§ 51).

Каждый угол правильного треугольника равен $\frac{2}{3}d$. Если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемым 3, 4 и 5 раз, то получим суммы, меньшие $4d$, а если повторим $\frac{2}{3}d$ слагаемым 6 раз или более, то получим в сумме $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам правильного треугольника, можно образовать выпуклые многогранные углы только трех видов: трехгранные, четырехгранные и пятигранные. Следовательно, если гранями правильного многогранника служат правильные треугольники, то в вершине многогранника могут сходиться или 3 ребра, или 4 ребра, или 5 ребер. Соответственно с этим имеется три вида правильных многогранников с треугольными гранями:

1) Правильный четырехгранник, или **тетраэдр,** поверхность которого составлена из четырех правильных треугольников (рис. 107). Он имеет 4 грани, 4 вершины и 6 ребер.

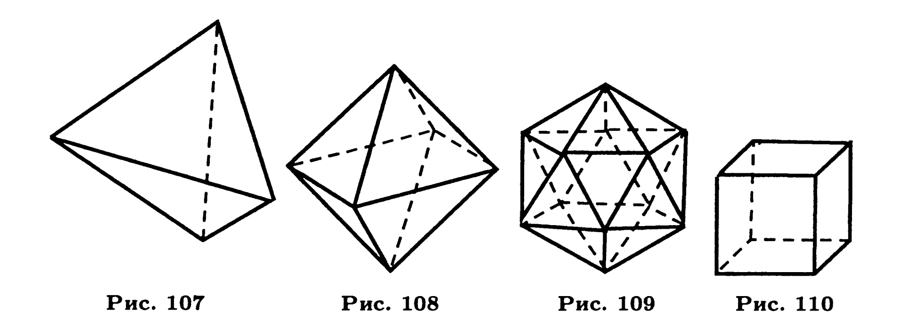


Рис. 107 Рис. 108 Рис. 109 Рис. 110

2) Правильный восьмигранник, или **октаэдр,** поверхность которого составлена из восьми правильных треугольников (рис. 108). Он имеет 8 граней, 6 вершин и 12 ребер.

3) Правильный 20-гранник, или **икосаэдр,** образованный двадцатью правильными треугольниками (рис. 109). Он имеет 20 граней, 12 вершин и 30 ребер.

Угол квадрата равен d, а угол правильного пятиугольника равен $\frac{6}{5}d$, повторяя эти углы слагаемым 3 раза, получаем суммы, меньшие $4d$, а повторяя их 4 раза или более, получаем $4d$ или более. Поэтому из плоских углов, равных углам квадрата или правильного пятиугольника, можно образовать только трехгранные углы.

А поэтому, если гранями многогранника служат квадраты, то в каждой вершине могут сходиться лишь 3 ребра. Имеется единственный правильный многогранник этого рода — это правильный шестигранник, или **гексаэдр,** или куб (рис. 110). Он имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.

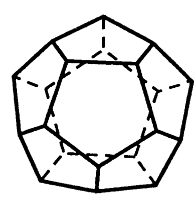


Рис. 111

Если гранями правильного многогранника служат правильные пятиугольники, то в каждой вершине могут сходиться лишь 3 ребра.

Существует единственный правильный многогранник этого рода — правильный 12-гранник, или **додекаэдр.** Он имеет 12 граней, 20 вершин и 30 ребер (рис. 111).

Угол правильного шестиугольника равен $\frac{4}{3}d$, поэтому из таких углов нельзя образовать даже трехгранного угла. Из углов правильных многоугольников, имеющих более 6 сторон, подавно нельзя образовать никакого выпуклого многогранного угла.

Отсюда следует, что гранями правильного многогранника могут служить лишь правильные треугольники, квадраты и правильные пятиугольники.

Таким образом, всего может существовать лишь пять видов правильных многогранников, указанных выше.

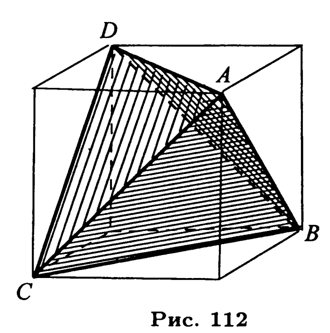


Рис. 112

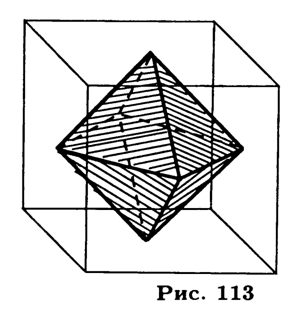


Рис. 113

98. Построение правильных многогранников. Изложенные выше рассуждения о возможных видах правильных многогранников доказывают, что может существовать не более пяти видов правильных многогранников.

Но из этих рассуждений еще не вытекает, что все эти пять видов правильных многогранников действительно существуют, т. е. что можно проведением плоскостей в пространстве осуществить построение каждого из этих пяти возможных правильных многогранников. Чтобы убедиться в существовании всех правильных многогранников, достаточно указать способ построения каждого из них. Способ построения куба указать весьма легко. Действительно, берем произвольную плоскость P и в ней какой-либо квадрат; через стороны этого квадрата проводим плоскости, перпендикулярные к плоскости P. Таких плоскостей будет четыре. Далее проводим плоскость Q, параллельную P и отстоящую от нее на расстоянии, равном стороне квадрата. Шесть полученных плоскостей образуют грани куба; двенадцать прямых — пересечения каждой пары пересекающихся плоскостей — являются ребрами куба, а восемь точек пересечения каждой тройки пересекающихся плоскостей служат вершинами куба. В этом легко убедиться, непосредственно рассматривая полученную совокупность точек, прямых и плоскостей. Умея построить куб, легко найти способ построения всех других правильных многогранников.

Построение правильного тетраэдра. Пусть дан куб (рис. 112). Возьмем какую-нибудь его вершину, например A. В ней сходятся три грани куба, имеющие форму квадратов. В каждом из этих квадратов берем вершину, противоположную точке A. Пусть это будут вершины куба B, C и D. Точки A, B, C и D служат вершинами правильного тетраэдра. Действительно, каждый из отрезков AB, BC, CD, AD, BD и AC, очевидно, служит диагональю одной из граней куба. А потому все эти отрезки равны между собой. Отсюда следует, что в треугольной пирамиде с вершиной A и основанием BCD все грани — правильные треугольники, следовательно, эта пирамида — правильный тетраэдр. Этот тетраэдр вписан в данный куб.

Полезно заметить, что оставшиеся четыре вершины куба служат вершинами второго правильного тетраэдра, равного первому и также вписанного в данный куб.

Построение октаэдра. Если в данном кубе построить центры всех его граней, то шесть полученных точек служат вершинами октаэдра. В этом легко убедиться, рассматривая рис. 113.

Построение додекаэдра и икосаэдра. Если через каждое из 12 ребер куба провести плоскость, не имеющую с поверхностью куба других общих точек, кроме точек того ребра, через которое она проведена, то полученные 12 плоскостей образуют грани некоторого 12-гранника. Более подробное изучение формы этого многогранника показывает, что можно так подобрать наклон этих плоскостей к граням куба, что полученный 12-гранник будет додекаэдром.

Наконец, если мы умеем построить додекаэдр, то построение икосаэдра не представляет затруднений: центры граней додекаэдра служат вершинами икосаэдра.

5. ПОНЯТИЕ О СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

99. Центральная симметрия. Две фигуры называются симметричными относительно какой-либо точки O пространства, если каждой точке A одной фигуры соответствует в другой фигуре точка A', расположенная на прямой OA по другую сторону от точки O, на расстоянии, равном расстоянию точки A от точки O (рис. 114). Точка O называется центром симметрии фигур.

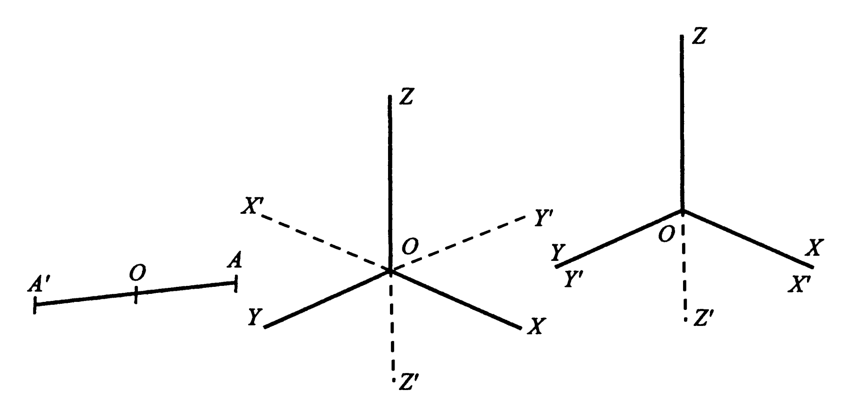


Рис. 114

Рис. 115

Пример таких симметричных фигур в пространстве мы уже встречали (§ 53), когда, продолжая за вершину ребра и грани многогранного угла, получали многогранный угол, симметричный данному. Соответственные отрезки и углы, входящие в состав двух симметрич-

ных фигур, равны между собой. Тем не менее фигуры в целом не могут быть названы равными: их нельзя совместить одну с другой вследствие того, что порядок расположения частей в одной фигуре иной, чем в другой, как это мы видели на примере симметричных многогранных углов.

В отдельных случаях симметричные фигуры могут совмещаться, но при этом будут совпадать несоответственные их части. Например, возьмем прямой трехгранный угол (рис. 115) с вершиной в точке O и ребрами OX, OY, OZ.

Построим ему симметричный угол $OX'Y'Z'$. Угол $OXYZ$ можно совместить с $OX'Y'Z'$ так, чтобы ребро OX совпало с OY', а ребро OY с OX'. Если же совместить соответственные ребра OX с OX' и OY с OY', то ребра OZ и OZ' окажутся направленными в противоположные стороны.

Если симметричные фигуры составляют в совокупности одно геометрическое тело, то говорят, что это геометрическое тело имеет центр симметрии. Таким образом, если данное тело имеет центр симметрии, то всякой точке, принадлежащей этому телу, соответствует симметричная точка, тоже принадлежащая данному телу. Из рассмотренных нами геометрических тел центр симметрии имеют, например: 1) параллелепипед, 2) призма, имеющая в основании правильный многоугольник с четным числом сторон.

Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.

100. Симметрия относительно плоскости. Две пространственные фигуры называются симметричными относительно плоскости P, если каждой точке A в одной фигуре соответствует в другой точка A', причем отрезок AA' перпендикулярен к плоскости P и в точке пересечения с этой плоскостью делится пополам.

Теорема. ***Всякие два соответственных отрезка в двух симметричных фигурах равны между собой.***

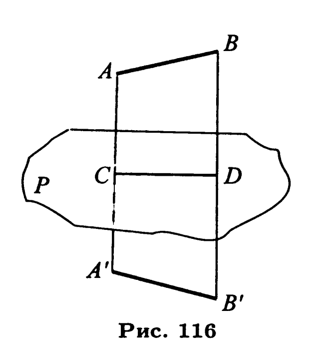


Рис. 116

Пусть даны две фигуры, симметричные относительно плоскости P. Выделим две какие-нибудь точки A и B первой фигуры, пусть A' и B' — соответствующие им точки второй фигуры (рис. 116, на рисунке фигуры не изображены). Пусть далее C — точка пересечения отрезка AA' с плоскостью P, D — точка пересечения отрезка BB' с той же плоскостью. Соединив прямолинейным отрезком точки C и D, получим два четырехугольника $ABDC$ и $A'B'DC$. Так как $AC = A'C$, $BD = B'D$ и $\angle ACD = \angle A'CD, \angle BDC = \angle B'DC$ как прямые углы, то эти четырехугольники равны (в чем легко убеждаемся наложением). Следовательно, $AB = A'B'$. Из этой теоремы непосредственно вытекает, что соответствующие плоские и двугран-

ные углы двух фигур, симметричных относительно плоскости, равны между собой. Тем не менее совместить эти две фигуры одну с другой так, чтобы совместились их соответственные части, невозможно, так как порядок расположения частей в одной фигуре обратный тому, который имеет место в другой (это будет доказано ниже, § 102). Простейшим примером двух фигур, симметричных относительно плоскости, являются: любой предмет и его отражение в плоском зеркале; всякая фигура, симметричная со своим зеркальным отражением относительно плоскости зеркала.

Если какое-либо геометрическое тело можно разбить на две части, симметричные относительно некоторой плоскости, то эта плоскость называется плоскостью симметрии данного тела.

Геометрические тела, имеющие плоскость симметрии, чрезвычайно распространены в природе и в обыденной жизни. Тело человека и животного имеет плоскость симметрии, разделяющую его на правую и левую части.

На этом примере особенно ясно видно, что симметричные фигуры нельзя совместить. Так, кисти правой и левой рук симметричны, но совместить их нельзя, что можно видеть хотя бы из того, что одна и та же перчатка не может подходить и к правой и к левой руке. Большое число предметов домашнего обихода имеет плоскость симметрии: стул, обеденный стол, книжный шкаф, диван и др. Некоторые, как например обеденный стол, имеют даже не одну, а две плоскости симметрии (рис. 117).

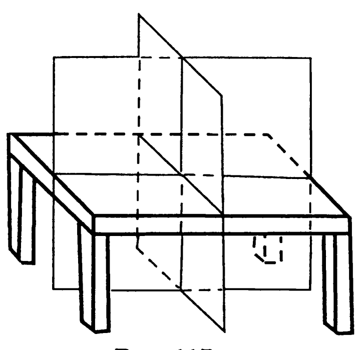


Рис. 117

Обычно, рассматривая предмет, имеющий плоскость симметрии, мы стремимся занять по отношению к нему такое положение, чтобы плоскость симметрии нашего тела, или по крайней мере нашей головы, совпала с плоскостью симметрии самого предмета. В этом случае симметричная форма предмета становится особенно заметной.

101. Симметрия относительно оси. Ось симметрии второго порядка. Две фигуры называются симметричными относительно оси l (ось — прямая линия), если каждой точке A первой фигуры соответствует точка A' второй фигуры, так что отрезок AA' перпендикулярен к оси, пересекается с нею и в точке пересечения делится пополам. Сама ось l называется осью симметрии второго порядка.

Из этого определения непосредственно следует, что если два геометрических тела, симметричных относительно какой-либо оси, пересечь плоскостью, перпендикулярной к этой оси, то в сечении получат-

ся две плоские фигуры, симметричные относительно точки пересечения плоскости с осью симметрии тел.

Отсюда далее легко вывести, что два тела, симметричных относительно оси, можно совместить одно с другим, вращая одно из них на 180° вокруг оси симметрии. В самом деле, вообразим все возможные плоскости, перпендикулярные к оси симметрии.

Каждая такая плоскость, пересекающая оба тела, содержит две фигуры, симметричные относительно точки встречи плоскости с осью симметрии тел. Если заставить скользить секущую плоскость саму по себе, вращая ее вокруг оси симметрии тела на 180° , то первая фигура совпадает со второй. Это справедливо для любой секущей плоскости. Вращение же всех сечений тела на 180° равносильно повороту всего тела на 180° вокруг оси симметрии. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

Если после вращения пространственной фигуры вокруг некоторой прямой на 180° она совпадает сама с собой, то говорят, что фигура имеет эту прямую своею осью симметрии второго порядка.

Название «ось симметрии второго порядка» объясняется тем, что при полном обороте вокруг этой оси тело будет в процессе вращения дважды принимать положение, совпадающее с исходным (считая и исходное). Примерами геометрических тел, имеющих ось симметрии второго порядка, могут служить:

1) правильная пирамида с четным числом боковых граней; осью ее симметрии служит ее высота;

2) прямоугольный параллелепипед; он имеет три оси симметрии: прямые, соединяющие центры его противоположных граней;

3) правильная призма с четным числом боковых граней. Осью ее симметрии служит каждая прямая, соединяющая центры любой пары противоположных граней (боковых граней и двух оснований призмы). Если число боковых граней призмы равно $2k$, то число таких осей симметрии будет $k+1$. Кроме того, осью симметрии для такой призмы служит каждая прямая, соединяющая середины ее противоположных боковых ребер. Таких осей симметрии призма имеет k.

Таким образом, правильная $2k$-гранная призма имеет $2k + 1$ осей симметрии.

102. Зависимость между различными видами симметрии в пространстве. Между различными видами симметрии в пространстве — осевой, плоскостной и центральной — существует зависимость, выражаемая следующей теоремой.

Теорема. ***Если фигура F симметрична с фигурой F' относительно плоскости P и в то же время симметрична с фигурой F' относительно точки O, лежащей в плоскости P, то фигуры F' и F'' симметричны относительно оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к плоскости P.***

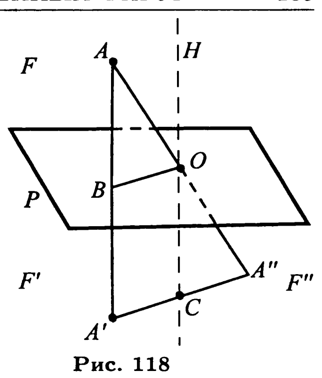


Рис. 118

Возьмем какую-нибудь точку A фигуры FF (рис. 118). Ей соответствует точка A' фигуры F' и точка A'' фигуры F'' (сами фигуры F, F' и F'' на чертеже не изображены).

Пусть B — точка пересечения отрезка AA' с плоскостью P. Проведем плоскость через точки A, A' и O. Эта плоскость будет перпендикулярна к плоскости P, так как проходит через прямую AA', перпендикулярную к этой плоскости. В плоскости $AA'O$ проведем прямую OH, перпендикулярную к OB. Эта прямая OH будет перпендикулярна и к плоскости P. Пусть далее C — точка пересечения прямых AA' и OH.

В треугольнике $AA'A''$ отрезок BO соединяет середины сторон AA' и AA'', следовательно, $BO \| A'A''$, но $BO \perp OH$, значит, $A'A'' \perp OH$. Далее, так как O — середина стороны AA'' и $CO \| AA'$, то $A'C = A''C$. Отсюда заключаем, что точки A' и A'' симметричны относительно оси OH. То же самое справедливо и для всех других точек фигуры. Значит, наша теорема доказана. Из этой теоремы непосредственно следует, что две фигуры, симметричные относительно плоскости, не могут быть совмещены так, чтобы совместились их соответственные части. В самом деле, фигура F' совмещается с F'' путем вращения вокруг оси OH на $180°$. Но фигуры F'' и F на могут быть совмещены как симметричные относительно точки, следовательно, фигуры F и F' также не могут быть совмещены.

103. Оси симметрии высших порядков. Фигура, имеющая ось симметрии, совмещается сама с собой после поворота вокруг оси симметрии на угол в 180°. Но возможны случаи, когда фигура приходит к совмещению с исходным положением после поворота вокруг некоторой оси на угол, меньший $180°$. Таким образом, если тело сделает полный оборот вокруг этой оси, то в процессе вращения оно несколько раз совместится со своим первоначальным положением. Такая ось вращения называется *осью симметрии высшего порядка*, причем число положений тела, совпадающих с первоначальным, называется порядком оси симметрии. Эта ось может и не совпадать с осью симметрии второго порядка. Так, правильная треугольная пирамида не имеет оси симметрии второго порядка, но ее высота служит для нее осью

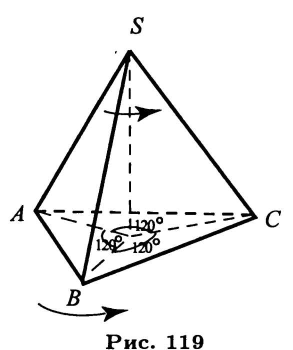


Рис. 119

симметрии третьего порядка. В самом деле, после поворота этой пирамиды вокруг высоты на угол в 120° она совмещается сама с собой (рис. 119). При вращении пирамиды вокруг высоты она может занимать три положения, совпадающие с исходным, считая и исходное. Легко заметить, что всякая ось симметрии четного порядка есть в то же время ось симметрии второго порядка.

Примеры осей симметрии высших порядков:

1) Правильная n-угольная пирамида имеет ось симметрии n-го порядка. Этой осью служит высота пирамиды.

2) Правильная n-угольная пирамида имеет ось симметрии n-го порядка. Этой осью служит прямая, соединяющая центры оснований призмы.

104. Симметрия куба. Как и для всякого параллелепипеда, точка пересечения диагоналей куба есть центр его симметрии.

Куб имеет девять плоскостей симметрии: шесть диагональных плоскостей и три плоскости, проходящие через середины каждой четверки его параллельных ребер.

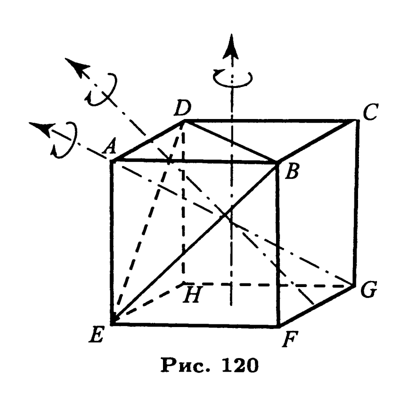


Рис. 120

Куб имеет девять осей симметрии второго порядка: шесть прямых, соединяющих середины его противоположных ребер, и три прямые, соединяющие центры противоположных граней (рис. 120). Эти последние прямые являются осями симметрии четвертого порядка. Кроме того, куб имеет четыре оси симметрии третьего порядка, которые являются его диагоналями. В самом деле, диагональ куба AG, очевидно, одинаково наклонена к ребрам AB, AD и AE, а эти ребра одинаково наклонены одно к другому. Если соединить точки B, D и E, то получим правильную треугольную пирамиду $ADBE$, для которой диагональ куба AG служит высотой. Когда при вращении вокруг высоты эта пирамида будет совмещаться сама с собой, весь куб будет совмещаться со своим исходным положением. Других осей симметрии, как нетрудно убедиться, куб не имеет. Посмотрим, сколькими различными способами куб может быть совмещен сам с собой. Вращение вокруг обыкновенной оси симметрии дает одно положение куба, отличное от исходного, при котором куб в целом совмещается сам с собой.

Вращение вокруг оси третьего порядка дает два таких положения, и вращение вокруг оси четвертого порядка — три таких положения. Так как куб имеет шесть осей второго порядка (это обыкновенные оси симметрии), четыре оси третьего порядка и три оси четвертого

порядка, то имеются $6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 23$ положения куба, отличные от исходного, при которых он совмещается сам с собой.

Легко убедиться непосредственно, что все эти положения отличны одно от другого, а также и от исходного положения куба. Вместе с исходным положением они составляют 24 способа совмещения куба с самим собой.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Ребро данного куба равно a. Найти ребро другого куба, объем которого вдвое более объема данного куба.

Замечание. Эта задача об удвоении куба, известная с древних времен, легко решается вычислением (именно: $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2} = a \times$ $\times 1{,}26992\ldots$), но построением (с помощью циркуля и линейки) она решена быть не может, так как формула для неизвестного содержит радикал третьей степени из числа, не являющегося кубом рационального числа.

2. Вычислить поверхность и объем прямой призмы, у которой основание — правильный треугольник, вписанный в круг радиуса $r = 2$ м, а высота равна стороне правильного шестиугольника, описанного около того же круга.

3. Определить поверхность и объем правильной восьмиугольной призмы, у которой высота $h = 6$ м, а сторона основания $a = 8$ см.

4. Определить боковую поверхность и объем правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота равна 1 м, а апофема составляет с высотой угол в $30°$.

5. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно l, а стороны основания суть a, b и c.

6. Дан трехгранный угол $SABC$, у которого все три плоских угла прямые. На его ребрах отложены длины: $SA = a; SB = b$ и $SC = c$. Через точки A, B и C проведена плоскость. Определить объем пирамиды $SABC$.

7. Высота пирамиды равна h, а основание — правильный шестиугольник со стороной a. На каком расстоянии x от вершины пирамиды следует провести плоскость, параллельную основанию, чтобы объем образовавшейся усеченной пирамиды равнялся V?

8. Определить объем правильного тетраэдра с ребром a.

9. Определить объем октаэдра с ребром a.

10. Усеченная пирамида, объем которой $V = 1465\,\text{см}^3$, имеет основаниями правильные шестиугольники со сторонами: $a = 23$ см и $b = 17$ см. Вычислить высоту этой пирамиды.

11. Объем V усеченной пирамиды равен $10{,}5\,\text{м}^3$, высота $h = \sqrt{3}$ м и сторона a правильного шестиугольника, служащего нижним основанием, равна 2 м. Вычислить сторону правильного шестиугольника, служащего верхним основанием.

12. На каком расстоянии от вершины S пирамиды $SABC$ надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы отношение объемов частей, на которые рассекается этой плоскостью пирамида, равнялось m?

13. Пирамида с высотой h разделена плоскостями, параллельными основанию, на три части, причем объемы этих частей находятся в отношении $m : n : p$. Определить расстояние этих плоскостей до вершины пирамиды.

14. Сумма объемов двух подобных многогранников равна V, а отношение сходственных ребер равно $m : n$. Определить их объемы.

15. Разделить усеченную пирамиду плоскостью, параллельной основаниям B и b, на две части, чтобы объемы находились в отношении $m : n$.

16. Найти центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из плоскости и пересекающей ее прямой, не перпендикулярной к этой плоскости.

Ответ: центр симметрии — точка пересечения прямой с плоскостью; плоскость симметрии — плоскость, перпендикулярная данной, проходящая через данную прямую; осью симметрии служит прямая, лежащая в данной плоскости и перпендикулярная к данной прямой.

17. Найти центр, оси и плоскости симметрии фигуры, состоящей из двух пересекающихся прямых.

Ответ: фигура имеет две плоскости симметрии и три оси симметрии (указать какие).

Глава IV

КРУГЛЫЕ ТЕЛА

1. ЦИЛИНДР И КОНУС

105. Поверхность вращения. Поверхностью вращения называется поверхность, которая получается от вращения какой-нибудь линии (MN, рис. 121), называемой образующей, вокруг неподвижной прямой (AB), называемой осью, при этом предполагается, что образующая (MN) при своем вращении неизменно связана с осью (AB).

Возьмем на образующей какую-нибудь точку P и опустим из нее на ось перпендикуляр PO. Очевидно, что при вращении не изменяются ни длина этого перпендикуляра, ни величина угла AOP, ни положение точки O. Поэтому каждая точка образующей описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна к оси AB и центр которой лежит на пересечении этой плоскости с осью. Отсюда следует:

Плоскость, перпендикулярная к оси, пересекаясь с поверхностью вращения, дает в сечении окружность.

Всякая секущая плоскость, проходящая через ось, называется **меридиональной** плоскостью, а линия ее пересечения с поверхностью вращения — **меридианом**. Все меридианы равны между собой, потому что при вращении каждый из них проходит через то положение, в котором ранее был всякий другой меридиан.

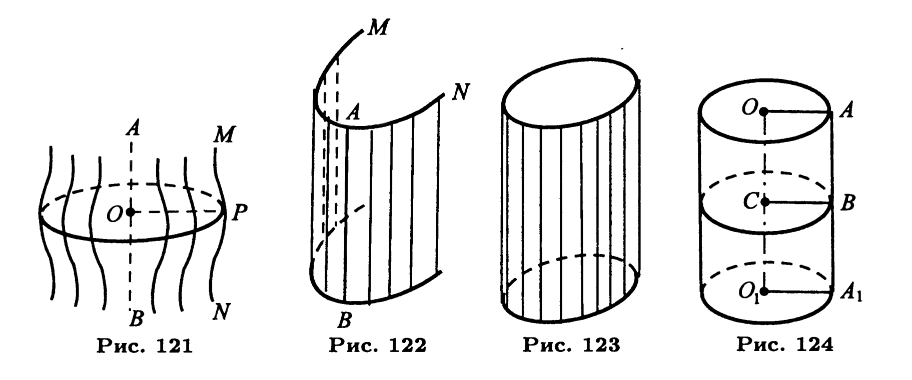


Рис. 121 Рис. 122 Рис. 123 Рис. 124

106. Цилиндрическая поверхность. Цилиндрической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой (AB, рис. 122), перемещающейся в пространстве параллельно данной прямой и пересекающей при этом данную линию (MN). Прямая AB называется **образующей**, а линия MN — **направляющей.**

107. Цилиндр. Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями (рис. 123).

Часть цилиндрической поверхности, заключенная между плоскостями, называется **боковой поверхностью**, а части плоскостей, отсекаемые этой поверхностью, — **основаниями** цилиндра. Расстояние между плоскостями оснований есть **высота** цилиндра. Цилиндр называется **прямым или наклонным,** смотря по тому, перпендикулярны или наклонны к основаниям его образующие.

Прямой цилиндр (рис. 124) называется круговым, если его основания — круги. Такой цилиндр можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольника OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1 как оси; при этом сторона AA_1 описывает боковую поверхность, а стороны OA и O_1A_1 — круги оснований. Всякий отрезок BC, параллельный OA, описывает также круг, плоскость которого перпендикулярна к оси. Отсюда следует:

Сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельной основаниям, есть круг.

В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой цилиндр; для краткости его называют просто цилиндром. Иногда приходится рассматривать такие призмы, основания которых — многоугольники, вписанные в основания цилиндра или описанные около них, а высоты равны высоте цилиндра; такие призмы называются вписанными в цилиндр или описанными около него.

108. Коническая поверхность. Конической поверхностью называется поверхность, производимая движением прямой (AB, рис. 125), перемещающейся в пространстве так, что она при этом постоянно проходит через неподвижную точку (S) и пересекает данную линию (MN). Прямая AB называется **образующей**, линия MN — **направляющей**, а точка S — **вершиной конической поверхности**.

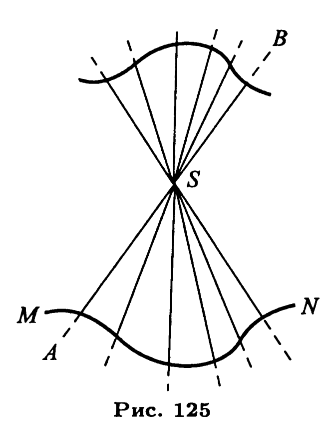


Рис. 125

109. Конус. Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины (рис. 126). Часть конической поверх-

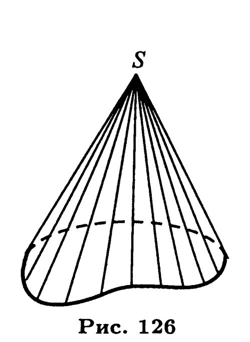


Рис. 126

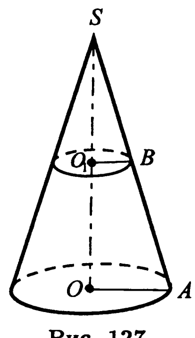


Рис. 127

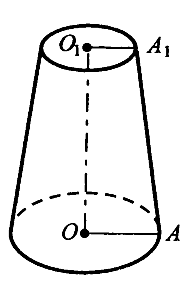


Рис. 128

ности, ограниченная этой плоскостью, называется **боковой поверхностью,** а часть плоскости, отсекаемая боковой поверхностью, — **основанием** конуса. Перпендикуляр, опущенный из вершины на плоскость основания, называется **высотой** конуса. Конус называется **прямым круговым**, если его основание есть круг, а высота проходит через центр основания (рис. 127). Такой конус можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольного треугольника SOA вокруг катета SO как оси. При этом гипотенуза SA описывает боковую поверхность, а катет OA — основание конуса. Всякий отрезок BO_1, параллельный OA, описывает при вращении круг, плоскость которого перпендикулярна к оси. Отсюда следует:

Сечение прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, есть круг.

В элементарной геометрии рассматривается только прямой круговой конус, который для краткости называется просто конусом.

Иногда приходится рассматривать такие пирамиды, основания которых суть многоугольники, вписанные в основание конуса или описанные около него, а вершина совпадает с вершиной конуса. Такие пирамиды называются **вписанными** в конус или **описанными** около него.

110. Усеченный конус. Так называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.

Круги, по которым параллельные плоскости пересекают конус, называются *основаниями* усеченного конуса.

Усеченный конус (рис. 128) можно рассматривать как тело, происходящее от вращения прямоугольной трапеции OAA_1O_1 вокруг стороны OO_1, перпендикулярной к основаниям трапеции.

Поверхность цилиндра и конуса

111. Определения. Боковые поверхности цилиндра и конуса принадлежат к поверхностям **кривым**, т. е. к таким, никакая часть

которых не может совместиться с плоскостью. Поэтому мы должны особо определить, что надо разуметь под величиной боковой поверхности цилиндра или конуса, когда сравнивают эти поверхности с плоской единицей площади. Мы будем придерживаться следующих определений:

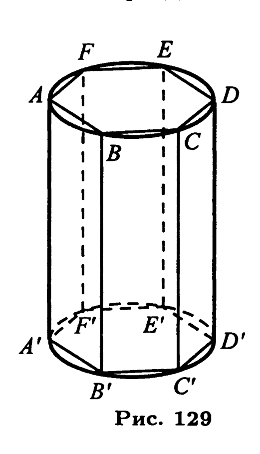


Рис. 129

1) *За величину боковой поверхности цилиндра принимают предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот цилиндр правильной призмы, когда число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание, неограниченно удваивается* (и, следовательно, площадь каждой боковой грани неограниченно убывает).

2) *За величину боковой поверхности конуса* (полного или усеченного) *принимается предел, к которому стремится боковая поверхность вписанной в этот конус правильной пирамиды* (полной или усеченной), *когда число сторон правильного многоугольника, вписанного в основание, неограниченно удваивается* (и, следовательно, площадь каждой боковой грани неограниченно убывает).

112. Теорема. ***Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.***

Впишем в цилиндр (рис. 129) какую-нибудь правильную призму. Обозначим буквами p и H числа, выражающие длины периметра основания и высоты этой призмы. Тогда боковая поверхность ее выразится произведением $p \cdot H$. Предположим теперь, что число сторон вписанного в основание многоугольника неограниченно возрастает.

Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а высота H останется без изменения; следовательно, боковая поверхность призмы, равная всегда произведению $p \cdot H$, будет стремиться к пределу CH. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности цилиндра. Обозначив боковую поверхность цилиндра буквой S, можем написать:

$$S = C \cdot H.$$

113. Следствия. 1) Если R обозначает радиус основания цилиндра, то $C = 2\pi R$, поэтому боковая поверхность цилиндра выразится формулой:

$$S = 2\pi R \cdot H.$$

2) Чтобы получить полную поверхность цилиндра, достаточно приложить к боковой поверхности сумму площадей двух оснований,

поэтому, обозначая полную поверхность через T, будем иметь:

$$T = 2\pi RH + \pi r^2 + \pi R^2 = 2\pi R(H + R)$$

114. Теорема. ***Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей.***

Впишем в конус (рис. 130) какую-нибудь правильную пирамиду и обозначим буквами p и l числа, выражающие длины периметра основания и апофемы этой пирамиды. Тогда боковая поверхность ее выразится произведением $\frac{1}{2}p \cdot l$.

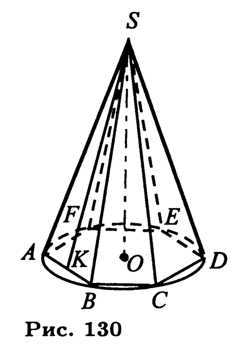


Рис. 130

Предположим теперь, что число сторон вписанного в основание многоугольника неограниченно возрастает. Тогда периметр p будет стремиться к пределу, принимаемому за длину C окружности основания, а апофема l будет иметь пределом образующую конуса (так как из $\triangle SAK$ следует, что $SA - SK < AK$, значит, если образующую конуса обозначим буквой L, то боковая поверхность вписанной пирамиды, постоянно равная $\frac{1}{2}p \cdot l$, будет стремиться к пределу $\frac{1}{2}C \cdot L$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности конуса. Обозначив боковую поверхность конуса буквой S, можем написать:

$$S = \frac{1}{2}C \cdot L = C\frac{1}{2}L.$$

115. Следствия. 1) Так как $C = 2\pi R$, то боковая поверхность конуса выразится формулой:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot L = \pi RL.$$

2) Полную поверхность конуса получим, если боковую поверхность сложим с площадью основания; поэтому, обозначая полную поверхность через T:

$$T = \pi RL + \pi R^2 = \pi R(L + R).$$

116. Теорема. ***Боковая поверхность усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.***

Впишем в усеченный конус (рис. 131) какую-нибудь правильную усеченную пирамиду и обозначим буквами p, P_1 и l числа, выражающие в одинаковых линейных единицах длины периметров нижнего

и верхнего оснований и апофемы этой пирамиды. Тогда боковая поверхность вписанной пирамиды равна $\frac{1}{2}(p + p_1)l$.

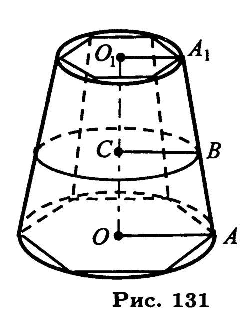


Рис. 131

При неограниченном возрастании числа боковых граней вписанной пирамиды периметры p и p_1 стремятся к пределам, принимаемым за длины C и C_1 окружностей оснований, а апофема l имеет пределом образующую L усеченного конуса. Следовательно, величина боковой поверхности вписанной пирамиды стремится при этом к пределу, равному $\frac{1}{2}(C + C_1)L$. Этот предел и принимается за величину боковой поверхности усеченного конуса. Обозначив боковую поверхность усеченного конуса буквой S, будем иметь:

$$S = \frac{1}{2}(C + C_1)L.$$

117. Следствия. 1) Если R и R_1 означают радиусы окружностей нижнего и верхнего оснований, то боковая поверхность усеченного конуса будет:

$$S = \frac{1}{2}(\pi R + 2\pi R_1)L = \pi(R + R_1)L.$$

2) Если в трапеции OO_1A_1A (рис. 131), от вращения которой получается усеченный конус, проведем среднюю линию BC, то получим:

$$BC = \frac{1}{2}(OA + O_1A_1) = \frac{1}{2}(R + R_1),$$

откуда

$$R + R_1 = 2BC.$$

Следовательно,

$$S = 2\pi BC \cdot L,$$

т. е. *боковая поверхность усеченного конуса равна произведению длины окружности среднего сечения на образующую.*

3) Полная поверхность T усеченного конуса выразится так:

$$T = \pi(R^2 + R_1^2 + RL + R_1L).$$

118. Развертка цилиндра и конуса. Впишем в цилиндр (рис. 132 какую-нибудь правильную призму и затем вообразим, что боковая ее

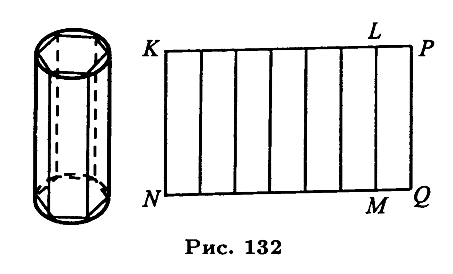
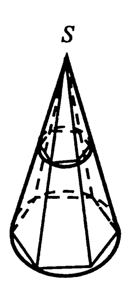


Рис. 132

поверхность разрезана вдоль бокового ребра. Очевидно, что, вращая ее грани вокруг ребер, мы можем р а з в е р н у т ь эту поверхность в плоскую фигуру без разрыва и без складок. Тогда получится то, что называется **разверткой** боковой поверхности призмы. Она представляет собой прямоугольник $KLMN$, составленный из стольких отдельных прямоугольников, сколько в призме боковых граней. Основание его MN равно периметру основания призмы, а высота KN есть высота призмы.

Вообразим теперь, что число боковых граней вписанной призмы неограниченно удваивается; тогда ее развертка будет все удлиняться, приближаясь к предельному прямоугольнику $KPQN$, у которого длина основания равна длине окружности основания цилиндра, а высота есть высота цилиндра. Этот прямоугольник называется **разверткой** боковой поверхности цилиндра.

Подобно этому вообразим, что в конус вписана какая-нибудь правильная пирамида (рис. 133). Мы можем разрезать ее боковую поверхность по одному из ребер и затем, повертывая грани вокруг ребер, получить ее плоскую развертку в виде многоугольного сектора SKL, составленного из стольких равнобедренных треугольников, сколько в пирамиде боковых граней. Отрезки $SK, Sa, Sb, \dots$ равны боковому ребру пирамиды (или образующей конуса), а длина ломаной $Kab \dots L$ равна периметру основания пирамиды. При неограниченном удвоении числа боковых граней вписанной пирамиды развертка ее увеличивается, приближаясь к предельному сектору SKM, у которого длина дуги KM равна длине окружности основания, а радиус SK равен образующей конуса. Этот сектор называется **разверткой** боковой поверхности конуса.



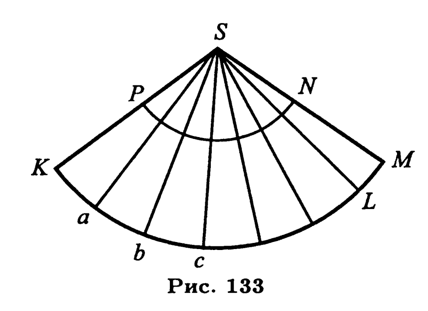


Рис. 133

Подобно этому можно получить развертку боковой поверхности усеченного конуса (рис. 133) в виде части кругового кольца $KMNP$. Легко видеть, что боковая поверхность цилиндра или конуса равна площади соответствующей развертки.

Объем цилиндра и конуса

119. Определения. *За величину объема цилиндра принимается предел, к которому стремится объем правильной призмы, вписанной в цилиндр, когда число боковых граней этой призмы неограниченно удваивается.*

2) *За величину объема конуса* (полного или усеченного) *принимается предел, к которому стремится объем правильной пирамиды* (полной или усеченной), *когда число боковых граней пирамиды неограниченно удваивается.*

120. Теоремы. 1) ***Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.***

2) ***Объем конуса равен произведению площади основания на треть высоты.***

Впишем в цилиндр какую-нибудь правильную призму, а в конус — какую-нибудь правильную пирамиду; тогда, обозначив площадь основания призмы или пирамиды буквой B_1, высоту их буквой H и объем — V_1, получим:

$$\text{для призмы } V_1 = B_1H; \quad \text{для пирамиды } V_1 = \frac{1}{3}B_1H.$$

Вообразим теперь, что число боковых граней призмы и пирамиды неограниченно удваивается. Тогда B_1 будет иметь пределом площадь B основания цилиндра или конуса, а высота H остается без изменения; значит, произведения B_1H и $1/3B_1H$ будут стремиться к пределам B_1H и $1/3B_1H$, и потому объем V цилиндра или конуса будет:

$$\text{для цилиндра } V = BH; \quad \text{для конуса } V = \frac{1}{3}BH.$$

121. Следствие. Если радиус основания цилиндра или конуса обозначим через R, то $B = \pi R^2$, поэтому объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, объем конуса $V = 1/3\pi R^2 H$.

122. Теорема. ***Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один — нижнее основание этого конуса, другой — верхнее, третий — круг, площадь которого есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований.***

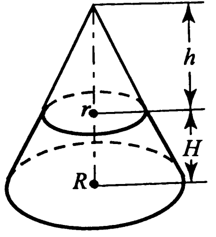


Рис. 134

Теорему эту докажем совершенно так же, как раньше мы доказали теорему для объема усеченной пирамиды (§ 92).

На верхнем основании усеченного конуса (рис. 134) поместим такой малый конус (с высотой h), который дополняет данный усеченный конус до полного.

Тогда объем V усеченного конуса можно рассматривать как разность объемов полного конуса и дополнительного. Поэтому

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2(H+h) - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left[R^2 H + (R^2 - r^2)h\right].$$

Из подобия треугольников находим:

$$\frac{R}{r} = \frac{H+h}{h},$$

откуда получаем:

$$Rh = rH + rh; \quad (R-r)h = rH; \quad h = \frac{rH}{R-r}.$$

Поэтому

$$V = \frac{1}{3}\pi\left[R^2 H + (R+r)\right] = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi RrH + \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

Так как πR^2 выражает площадь нижнего основания, πr^2 — площадь верхнего основания и $\pi Rr = \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2}$ есть среднее геометрическое между площадями верхнего и нижнего оснований, то полученная нами формула вполне подтверждает теорему.

Подобные цилиндры и конусы

123. Определение. Два цилиндра или конуса называются подобными, если они произошли от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников вокруг сходственных сторон.

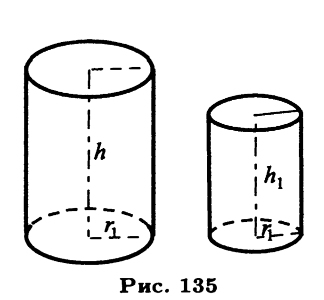
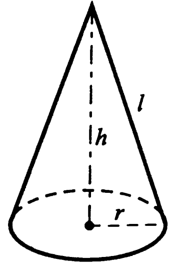


Рис. 135



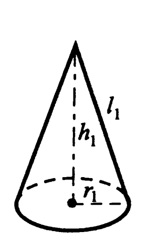


Рис. 136

Пусть (рис. 135 и 136) h и h_1 будут высоты двух подобных цилиндров или конусов, r и r_1 — радиусы их оснований, l и l_1 — образующие; тогда согласно определению

$$\frac{r}{r_1} = \frac{h}{h_1} \quad \text{и} \quad \frac{r}{r_1} = \frac{l}{l_1},$$

откуда (по свойству равных отношений) находим:

$$\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r}{r_1} \quad \text{и} \quad \frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r}{r_1}.$$

Заметив эти пропорции, докажем следующую теорему:

124. Теорема. ***Боковые и полные поверхности подобных цилиндров или конусов относятся, как квадраты радиусов или высот; объемы — как кубы радиусов или высот.***

Пусть S, T и V будут соответственно боковая поверхность, полная поверхность и объем одного цилиндра или конуса; S_1, T_1 и V_1 — те же величины для другого цилиндра или конуса, подобного первому. Тогда будем иметь для цилиндров:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{2\pi rh}{2\pi r_1h_1}=\frac{rh}{r_1h_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$
$$\frac{T}{T_1}=\frac{2\pi r(r+h)}{2\pi r_1(r_1+h_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+h}{r_1+h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{h^2}{h_1^2};$$
$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi r^2h}{\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3};$$

для конусов

$$\frac{S}{S_1}=\frac{\pi rl}{\pi r_1l_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{l}{l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{l^2}{l_1^2};$$
$$\frac{T}{T_1}=\frac{\pi r(r+l)}{\pi r_1(r_1+l_1)}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{r+l}{r_1+l_1}=\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{l^2}{l_1^2};$$
$$\frac{V}{V_1}=\frac{\frac{1}{3}\pi r^2h}{\frac{1}{3}\pi r_1^2h_1}=\frac{r^2}{r_1^2}\cdot\frac{h}{h_1}=\frac{r^3}{r_1^3}=\frac{h^3}{h_1^3}.$$

2. ШАР

Сечение шара плоскостью

125. Определение. Тело, происходящее от вращения полукруга вокруг диаметра, называется **шаром**, а поверхность, образуемая при этом полуокружностью, называется **шаровой** или **сферической** поверхностью. Можно также сказать, что эта поверхность есть геометрическое место точек, одинаково удаленных от одной и той же точки (называемой **центром** шара).

Отрезок, соединяющий центр с какой-нибудь точкой поверхности, называется **радиусом,** а отрезок, соединяющий две точки поверхности и проходящий через центр, называется **диаметром** шара. Все

радиусы одного шара равны между собой; всякий диаметр равен двум радиусам.

Два шара одинакового радиуса равны, потому что при вложении они совмещаются.

126. Теорема. ***Всякое сечение шара плоскостью есть круг.***

1) Предположим сначала, что (рис. 137) секущая плоскость AB проходит через центр O шара. Все точки линии пересечения принадлежат шаровой поверхности и поэтому одинаково удалены от точки O, лежащей в секущей плоскости; следовательно, сечение есть круг с центром в точке O.

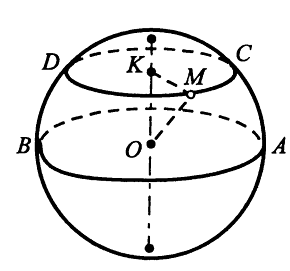


Рис. 137

2) Положим теперь, что секущая плоскость CD не проходит через центр. Опустим на нее из центра перпендикуляр OK и возьмем на линии пересечения какую-нибудь точку M. Соединив ее с O и K, получим прямоугольный треугольник MOK, из которого находим:

$$MK = \sqrt{OM^2 - OK^2}. \qquad (1)$$

Так как длины отрезков OM и OK не изменяются при изменении положений точки M на линии пересечения, то расстояние MK есть величина постоянная для данного сечения; значит, линия пересечения есть окружность, центр которой есть точка K.

127. Следствие. Пусть R и r будут длины радиуса шара и радиуса круга сечения, а d — расстояние секущей плоскости от центра, тогда равенство (1) примет вид: $r = \sqrt{R^2 - r^2}$.

Из этой формулы выводим:

1) *Наибольший радиус сечения получается при $d = 0$, т. е. когда секущая плоскость проходит через центр шара.* В этом случае $r = R$. Круг, получаемый в этом случае, называется **большим кругом.**

2) *Наименьший радиус сечения получается при $d = R$.* В этом случае $r = 0$, т. е. круг сечения обращается в точку.

3) *Сечения, равноотстоящие от центра шара, равны.*

4) *Из двух сечений, неодинаково удаленных от центра шара, то, которое ближе к центру, имеет больший радиус.*

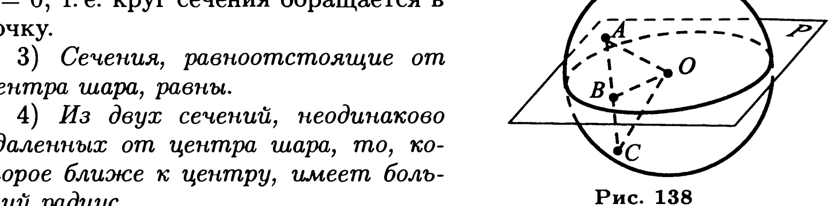


Рис. 138

128. Теорема. ***Всякая плоскость*** (P, рис. 138), ***проходящая через центр шара, делит его поверхность на две симметричные и равные части.***

Возьмем на поверхности шара какую-нибудь точку A; пусть AB есть перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость P. Продолжим AB до пересечения с поверхностью шара в точке C. Проведя BO, мы получим два равных прямоугольных треугольника AOB и BOC (общий катет BO, а гипотенузы равны, как радиусы шара); следовательно, $AB = BC$, таким образом, всякой точке A поверхности шара соответствует другая точка C этой поверхности, симметричная относительно плоскости P с точкой A. Значит, плоскость P делит поверхность шара на две симметричные части.

Эти части не только симметричны, но и равны, так как, разрезав шар по плоскости P, мы можем вложить одну из двух частей в другую и совместить эти части.

129. Теорема. ***Через две точки шаровой поверхности, не лежащие на концах одного диаметра, можно провести окружность большого круга и только одну.***

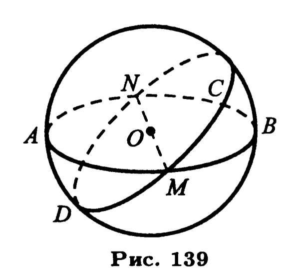


Рис. 139

Пусть на шаровой поверхности (рис. 139), имеющей центр O, взяты какие-нибудь две точки, например C и N, не лежащие на одной прямой с точкой O. Тогда через точки C, O и N можно провести плоскость. Эта плоскость, проходя через центр O, даст в пересечении с шаровой поверхностью окружность большого круга.

Другой окружности большого круга через те же две точки C и N провести нельзя. Действительно, всякая окружность большого круга должна, по определению, лежать в плоскости, проходящей через центр шара; следовательно, если бы через C и N можно было провести еще другую окружность большого круга, тогда выходило бы, что через три точки C, N и O, не лежащие на одной прямой, можно провести две различные плоскости, что невозможно.

130. Теорема. ***Окружности двух больших кругов при пересечении делятся пополам.*** Центр O (рис. 139), находясь на плоскостях обоих больших кругов, лежит на прямой, по которой эти круги пересекаются; значит, эта прямая есть диаметр того и другого круга, а диаметр делит окружность пополам.

Плоскость, касательная к шару

131. Определение. Плоскость, имеющая с шаровой поверхностью только одну общую точку, называется **касательной плоскостью.** Возможность существования такой плоскости доказывается следующей теоремой.

132. Теорема. ***Плоскость*** (P, рис. 140), ***перпендикулярная к радиусу (AO) в конце его, лежащем на поверхности шара, есть касательная плоскость.***

Возьмем на плоскости P произвольную точку B и проведем прямую OB. Так как OB — наклонная, а OA — перпендикуляр к плоскости P, то $OB > OA$. Поэтому точка B лежит вне шаровой поверхности; следовательно, у плоскости P есть только одна общая точка A с шаровой поверхностью; значит, эта плоскость касательная.

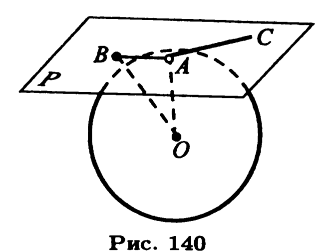


Рис. 140

133. Обратная теорема. ***Касательная плоскость*** (P, рис. 140) ***перпендикулярна к радиусу*** (OA), ***проведенному в точку касания.***

Так как, по определению, точка A есть единственная общая точка у плоскости с шаровой поверхностью, то всякая другая точка плоскости лежит вне шаровой поверхности и, следовательно, отстоит от центра на большее расстояние, чем A; таким образом, отрезок OA есть кратчайшее расстояние точки O от плоскости, т. е. OA есть перпендикуляр к P.

Прямая, имеющая одну общую точку с шаровой поверхностью, называется касательной к шару. Легко видеть, что существует бесчисленное множество прямых, касающихся шара в данной точке. Действительно, всякая прямая (AC, рис. 140), лежащая в плоскости, касательной к шару, в данной точке (A) и проходящая через точку касания (A), есть касательная к шару в этой точке.

Поверхность шара и его частей

134. Определения. 1) Часть шаровой поверхности (рис. 141), отсекаемая от нее какой-нибудь плоскостью (AA_1), называется **сегментной поверхностью.**

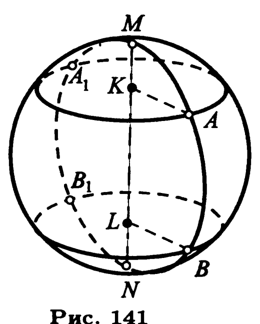


Рис. 141

Окружность AA_1 называется **основанием**, а отрезок KM радиуса, перпендикулярного к плоскости сечения, — высотой сегментной поверхности.

2) Часть шаровой поверхности, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (AA_1 и BB_1), называется **шаровым поясом или зоной.**

Окружности сечения AA_1 и BB_1 называются **основаниями,** а расстояние KL между параллельными плоскостями — **высотой пояса.**

Шаровой пояс и сегментную поверхность можно рассматривать как поверхность вращения, в то время как полуокружность $MABN$, вращаясь вокруг диаметра MN, описывает шаровую поверхность, часть ее AB описывает пояс, а часть MA — сегментную поверхность.

Для нахождения величины шаровой поверхности и ее частей мы докажем следующую лемму:

135. Лемма. ***Боковая поверхность каждого из трех тел: конуса, усеченного конуса и цилиндра — равна произведению высоты тела на длину окружности, у которой радиус есть перпендикуляр, восставленный к образующей из ее середины до пересечения с осью.***

1) Пусть конус образуется (рис. 142) вращением треугольника ABC вокруг катета AC. Если D есть середина образующей AB, то (§ 115)

$$\text{боковая поверхность конуса} = 2\pi \cdot BC \cdot AD. \qquad (1)$$

Проведя $DE \perp AB$, получим два подобных треугольника ABC и ADE (они прямоугольные и имеют общий угол A); из их подобия выводим:

$$BC : ED = AC : AD,$$

откуда

$$BC \cdot AD = ED \cdot AC,$$

и равенство (1) дает:

$$\text{боковая поверхность конуса} = 2\pi \cdot ED \cdot AC,$$

что и требовалось доказать.

2) Пусть усеченный конус (рис. 143) образуется вращением трапеции $ABCD$ вокруг стороны AD.

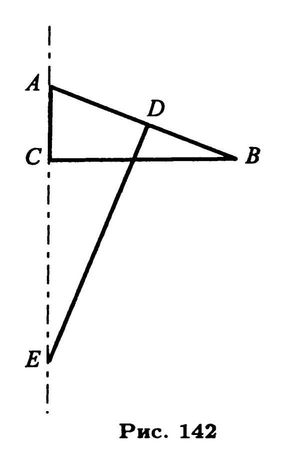


Рис. 142

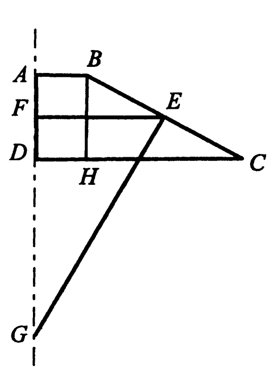


Рис. 143

Проведя среднюю линию EF, будем иметь (§ 117):

$$\text{боковая поверхность усеченного конуса} = 2\pi \cdot EF \cdot BC. \qquad (2)$$

Проведем $EG \perp BC$ и $BH \perp DC$. Тогда получим два подобных треугольника EFG и BCH (стороны одного перпендикулярны к сторонам другого); из их подобия выводим:

$$EF : BH = EG : BC,$$

откуда

$$EF \cdot BC = BH \cdot EG = AD \cdot EG.$$

Поэтому равенство (2) можно записать так:

$$\text{боковая поверхность усеченного конуса} = 2\pi \cdot EG \cdot AD,$$

что и требовалось доказать.

3) Теорема остается верной и в применении к цилиндру, так как окружность, о которой говорится в теореме, равна окружности основания цилиндра.

136. Определение. За величину поверхности шарового пояса, образуемого вращением (рис. 144) какой-нибудь части (BE) полуокружности вокруг диаметра (AF), принимают **предел**, к которому стремится поверхность, образуемая вращением вокруг того же диаметра правильной вписанной ломаной линии ($BCDE$), когда ее стороны неограниченно уменьшаются (и, следовательно, число сторон неограниченно увеличивается).

Это определение распространяется и на сегментную поверхность, и на шаровую поверхность; в последнем случае ломаная линия вписывается в целую полуокружность.

137. Теоремы. 1) ***Сегментная поверхность равна произведению ее высоты на длину окружности большого круга.***

2) ***Поверхность шарового пояса равна произведению его высоты на длину окружности большого круга.***

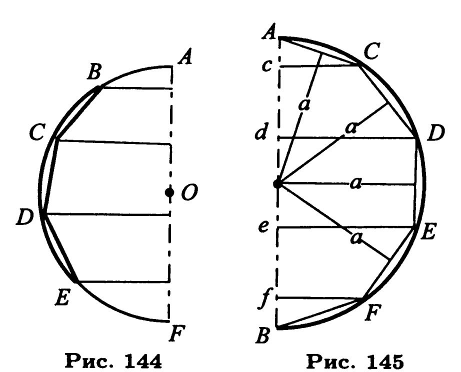


Рис. 144 Рис. 145

Впишем в дугу AF (рис. 145), образующую при вращении сегментную поверхность, правильную ломаную линию $ACDEF$ с произвольным числом сторон.

Поверхность, получающаяся от вращения этой ломаной, состоит из частей, образуемых вращением сторон AC, CD, DE и т. д. Эти части представляют собой боковые поверхности или полного конуса (от вращения AC), или усеченного конуса (от вращения $CD, EF, \ldots$),

или цилиндра (от вращения DE), если $DE \| AB$. Поэтому мы можем применить к ним лемму § 135. При этом заметим, что каждый из перпендикуляров, восставленных из середин образующих до пересечения с осью, равен апофеме ломаной линии. Обозначив эту апофему буквой a, получим:

поверхность,	образованная	вращением	$AC = Ac \cdot 2\pi a;$
"	"	"	$CD = cd \cdot 2\pi a;$
"	"	"	$DE = de \cdot 2\pi a$

и т. д.

Сложив эти равенства почленно, найдем:

$$\text{поверхность, образованная вращением } ACDEF = Af \cdot 2\pi a.$$

При неограниченном увеличении числа сторон вписанной ломаной апофема a стремится к пределу, равному радиусу шара R, а отрезок A остается без изменения; следовательно, предел поверхности, образованной вращением $ACDEF = Af \cdot 2\pi R$. Но предел поверхности, образованной вращением $ACDEF$, принимают за величину сегментной поверхности, а отрезок Af есть высота H сегментной поверхности; поэтому

$$\text{сегментная поверхность} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH.$$

2) Предположим, что правильная ломаная линия вписана не в дугу AF, образующую сегментную поверхность, а в какую-нибудь дугу CF, образующую шаровой пояс (рис. 145). Это изменение, как легко видеть, нисколько не влияет на ход предыдущих рассуждений, поэтому и вывод остается тот же, т. е. что

$$\text{поверхность шарового пояса} = H \cdot 2\pi R = 2\pi RH,$$

где буквой H обозначена высота cf шарового пояса.

138. Теорема. ***Поверхность шара равна произведению длины окружности большого круга на диаметр,***

или: ***поверхность шара равна учетверенной площади большого круга.***

Поверхность шара, образуемую вращением полуокружности ADB (рис. 145), можно рассматривать как сумму поверхностей, образуемых вращением дуг AD и DB. Поэтому согласно предыдущей теореме можно написать:

$$\text{поверхность шара} = 2\pi R \cdot Ad + 2\pi R \cdot dB = 2\pi R(Ad + dB) = \\ = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$

139. Следствие. *Поверхности шаров относятся, как квадраты их радиусов или диаметров*, потому что, обозначая через R и R_1 радиусы, а через S и S_1 поверхности двух шаров, будем иметь:

$$S : S_1 = 4\pi R^2 : 4\pi R_1^2 = R^2 : R_1^2 = 4R^2 : 4R_1^2 = (2R)^2 : (2R_1)^2.$$

Объем шара и его частей

140. Определение. Тело, получаемое от вращения (рис. 146) кругового сектора (COD) вокруг диаметра (AB), не пересекающего ограничивающую его дугу, называется **шаровым сектором**. Это тело ограничено боковыми поверхностями двух конусов и поверхностью шарового пояса; последняя называется **основанием** шарового сектора. Один из радиусов кругового сектора может совпадать с осью вращения; например, сектор AOC, вращаясь вокруг AO, производит шаровой сектор $OCAC_1$, ограниченный боковой поверхностью конуса и сегментной поверхностью. Для нахождения объема шарового сектора и целого шара мы предварительно докажем следующую лемму.

141. Лемма. ***Если $\triangle ABC$* (рис. 147) *вращается вокруг оси xy, которая лежит в плоскости треугольника, проходит через его вершину A, но не пересекает стороны BC, то объем тела, получаемого при этом вращении, равен произведению поверхности, образуемой противоположной стороной BC, на одну треть высоты h, опущенной на эту сторону.***

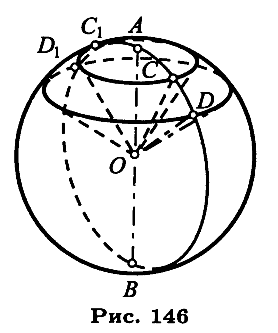


Рис. 146

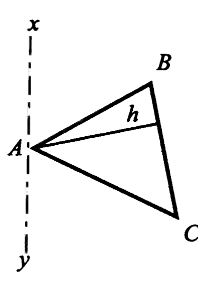


Рис. 147

При доказательстве рассмотрим три случая:

1) Ось совпадает со стороной AB (рис. 148). В этом случае искомый объем равен сумме объемов двух конусов, получаемых вращением прямоугольных треугольников BCD и DCA. Первый объем равен $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DB$, а второй $\frac{1}{3}\pi CD^2 \cdot DA$; поэтому объем, образованный вращением ABC, равен $\frac{1}{3}\pi CD^2(DB + DA) = \frac{1}{3}\pi CD \cdot CD \cdot BA.$

Произведение $CD \cdot BA$ равно $BC \cdot h$, так как каждое из этих произведений выражает двойную площадь $\triangle ABC$; поэтому

$$\text{объем } ABC = \frac{1}{3}\pi CD \cdot BC \cdot h.$$

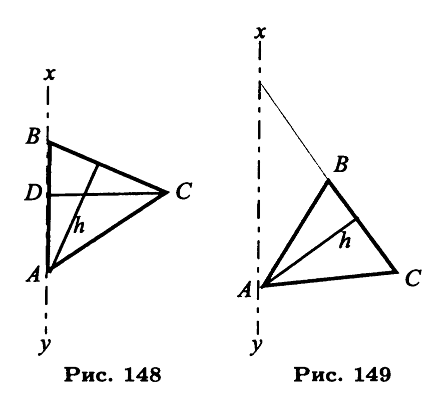


Рис. 148 Рис. 149

Но произведение $\pi CD \cdot BC$ равно боковой поверхности конуса BDC; значит,

$$\text{объем } ABC = \\ = (\text{поверхность } BC)\cdot\frac{1}{3}h.$$

2) Ось не совпадает с AB и не параллельна BC (рис. 149). В этом случае искомый объем равен разности объемов тел, производимых вращением треугольников AMC и AMB. По доказанному в первом случае

$$\text{объем } AMC = \frac{1}{3}h \cdot (\text{поверхность } MC),$$

$$\text{объем } AMB = \frac{1}{3}h \cdot (\text{поверхность } MB),$$

следовательно,

$$\text{объем } ABC = \frac{1}{3}h \cdot (\text{поверхность } MC - \text{поверхность } MB) = \\ = \frac{1}{3}h \cdot (\text{поверхность } BC).$$

3) Ось параллельна стороне BC (рис. 150). Тогда искомый объем равен объему, производимому вращением $DEBC$ без суммы объемов, производимых вращением треугольников AEB и ACD; первый из них равен $\pi DC^2 \cdot ED$; второй $\frac{1}{3}\pi EB^2 \cdot EA$ и третий $\frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot AD$. Приняв теперь во внимание, что $EB = DC$, получим:

Рис. 150

$$\text{объем} ABC = \pi DC^2 \left[ED - \frac{1}{3}(EA + AD)\right] = \\ = \pi DC^2 \left(ED - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \pi DC^2 \cdot ED.$$

Произведение $2\pi DC^2 \cdot ED$ выражает боковую поверхность цилиндра, образуемую стороной BC; поэтому

$$\text{объем } ABC = (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{1}{3}DC = (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{1}{3}h.$$

142. Определение. За величину объема шарового сектора, получаемого вращением вокруг диаметра (EF, рис. 151) кругового сектора (AOD), принимается предел, к которому стремится объем тела, образуемого вращением многоугольного сектора, который ограничен крайними радиусами (OA и OD) и правильной ломаной линией ($ABCD$), вписанной в дугу кругового сектора, когда число сторон ее неограниченно увеличивается.

143. Теорема. ***Объем шарового сектора равен произведению поверхности соответствующего шарового пояса*** (*или* ***соответствующей сегментной поверхности***) ***на треть радиуса.***

Пусть шаровой сектор производится вращением вокруг диаметра EF (рис. 151) сектора AOD.

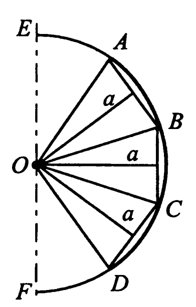


Рис. 151

Определим его объем V. Для этого впишем в дугу AD правильную ломаную линию $ABCD$ с произвольным числом сторон. Многоугольный сектор $OABCD$ образует при вращении некоторое тело, объем которого обозначим буквой V_1. Объем этот есть сумма объемов тел, получаемых вращением треугольников OAB, OBC, OCD вокруг оси EF.

Применим к этим объемам лемму, доказанную в § 141, причем заметим, что высоты треугольников равны апофеме a вписанной ломаной.

Согласно этой лемме будем иметь:

$$V_1 = (\text{поверхность } AB) \cdot \frac{a}{3} + (\text{поверхность } BC) \cdot \frac{a}{3} + \ldots =$$
$$= (\text{поверхность } ABCD) \cdot \frac{a}{3}.$$

Вообразим теперь, что число сторон ломаной линии неограниченно увеличивается. При этом условии поверхность $ABCD$ стремится к пределу, именно к поверхности шарового пояса AD, а апофема a имеет пределом радиус R; следовательно,

$$V = \text{пределу } V_1 = (\text{поверхность пояса } AD) \cdot \frac{R}{3}.$$

Замечание. Теорема и ее доказательство не зависят от того, будет ли один из радиусов кругового сектора совпадать с осью вращения или нет.

144. Теорема. ***Объем шара равняется произведению его поверхности на треть радиуса.***

Разбив полукруг $ABCD$ (рис. 152), производящий шар, на какие-нибудь круговые секторы AOB, BOC, COD, мы заметим, что объем шара можно рассматривать как сумму объемов шаровых секторов,

производимых вращением этих круговых секторов. Так как согласно предыдущей теореме

$$\text{объем } AOB = (\text{поверхность } AB)\cdot\frac{1}{3}R,$$
$$\text{объем } BOC = (\text{поверхность } BC)\cdot\frac{1}{3}R,$$
$$\text{объем } COD = (\text{поверхность } CD)\cdot\frac{1}{3}R,$$

то

$$\text{объем шара} = (\text{поверхность } AB + \text{поверхность } BC + \text{поверхность } CD)\cdot\frac{1}{3}R = (\text{поверхность } ABCD)\cdot\frac{1}{3}R.$$

Рис. 152

З а м е ч а н и е. Можно и непосредственно рассматривать объем шара как объем тела, образованного вращением вокруг диаметра кругового сектора, центральный угол которого равен 180° .

В таком случае объем шара можно получить как частный случай объема шарового сектора, у которого шаровой пояс составляет всю поверхность шара.

В силу предыдущей теоремы *объем шара будет при этом равен его поверхности, умноженной на одну треть радиуса.*

145. С л е д с т в и е 1 . Обозначим высоту шарового пояса или сегментной поверхности через H, радиус шара — через R, а диаметр — через D; тогда поверхность пояса или сегментная поверхность выразится, как мы видели (§ 137), формулой $2\pi RH$, а поверхность шара (§ 138) — формулой $4\pi R^2$; поэтому

$$\text{объем шарового сектора } = 2\pi RH\cdot\frac{1}{3}R = \frac{2}{3}\pi R^2 H;$$
$$\text{объем шара } = 4\pi R^2\cdot\frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

или

$$\text{объем шара } = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

Отсюда видно, что *объемы шаров относятся, как кубы их радиусов или диаметров**) .

146. С л е д с т в и е 2. *Поверхность и объем шара соответственно составляют $2/3$ полной поверхности и объема цилиндра, описанного около шара.*

Действительно, у цилиндра, описанного около шара, радиус основания равен радиусу шара, а высота равна диаметру шара; поэтому для такого цилиндра

$$\text{полная поверхность описанного цилиндра} = 2\pi R \cdot 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2,$$
$$\text{объем описанного цилиндра} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^2.$$

Отсюда видно, что $2/3$ полной поверхности этого цилиндра равны $4\pi R^2$, т. е. равны поверхности шара, а $2/3$ объема цилиндра составляют $4/3\pi R^3$, т. е. объем шара.

Это предложение было доказано Архимедом (в III в. до начала нашей эры). Архимед выразил желание, чтобы чертеж этой теоремы был изображен на его гробнице, что и было исполнено римским военачальником Марцеллом (Ф. К э д ж о р и. История элементарной математики).

Предлагаем учащимся как полезное упражнение доказать, что поверхность и объем шара составляют $4/9$ соответственно полной поверхности и объема о п и с а н н о г о к о н у с а, у которого образующая равна диаметру основания. Соединяя это предложение с указанным в следствии 2, мы можем написать такое равенство, где Q обозначает поверхность или объем:

---

*) Объем шара может быть выведен (не вполне, впрочем, строго) следующим простым рассуждением. Вообразим, что вся поверхность шара разбита на очень малые участки и что все точки контура каждого участка соединены радиусами с центром шара. Тогда шар разделится на очень большое число маленьких тел, из которых каждое можно рассматривать как пирамиду с вершиной в центре шара. Так как объем пирамиды равен произведению поверхности основания на третью часть высоты (которую можно принять равной радиусу шара), то объем шара, равный, очевидно, сумме объемов всех пирамид, выразится так:

$$\text{объем шара} = S \cdot \frac{1}{3}R,$$

где S — сумма поверхностей оснований всех пирамид. Но эта сумма поверхностей оснований должна составить поверхность шара, и, значит,

$$\text{объем шара} = 4\pi R^2 \cdot \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Таким образом, объем шара может быть найден посредством формулы его поверхности. Обратно, поверхность шара может быть найдена с помощью формулы его объема из равенства:

$$S \cdot \frac{1}{3}R = \frac{4}{3}\pi R^2, \text{ откуда } S = 4\pi R^2.$$

$$\frac{Q_{\text{шара}}}{4} = \frac{Q_{\text{цилиндра}}}{6} = \frac{Q_{\text{конуса}}}{9}.$$

147. Замечание. Формулу для объема шара можно весьма просто получить, основываясь на принципе Кавальери (§ 89), следующим образом.

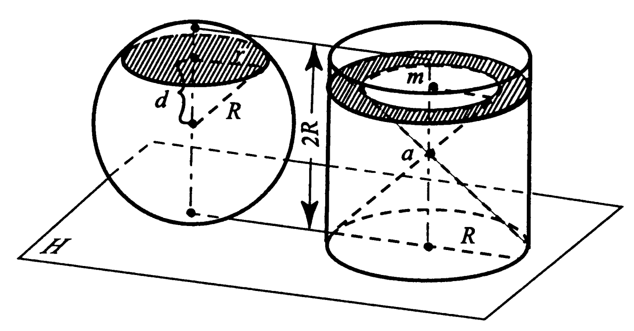


Рис. 153

Пусть на одной и той же плоскости H (рис. 153) помещены шар радиуса R и цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота $2R$ (значит, это такой цилиндр, который может быть описан около шара радиуса R). Вообразим далее, что из цилиндра вырезаны и удалены два конуса, имеющие общую вершину на середине a оси цилиндра, и основания — у одного верхнее основание цилиндра, у другого нижнее. От цилиндра останется тогда некоторое тело, объем которого, как мы сейчас увидим, равен объему нашего шара. Проведем какую-нибудь плоскость, параллельную плоскости H и которая пересекалась бы с обоими телами. Пусть расстояние этой плоскости от центра шара будет d, а радиус круга, полученного в сечении плоскости с шаром, пусть будет r. Тогда площадь этого круга окажется равной $\pi r^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Та же секущая плоскость даст в сечении с телом, оставшимся от цилиндра, круговое кольцо (оно на чертеже покрыто штрихами), у которого радиус внешнего круга равен R, а внутреннего d (прямоугольный треугольник, образованный этим радиусом и отрезком am, равнобедренный, так как каждый острый угол его равен $45°$). Значит, площадь этого кольца равна $\pi R^2 - \pi d^2 = \pi(R^2 - d^2)$. Мы видим, таким образом, что секущая плоскость, параллельная плоскости H, дает в сечении с шаром и телом, оставшимся от цилиндра, фигуры одинаковой площади, следовательно, согласно принципу Кавальери, объемы этих тел равны. Но объем тела, оставшегося от цилиндра, равен объему цилиндра без удвоенного объема конуса, т. е. он равен

$$\pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

значит, это и будет объем шара.

148. Определения. 1) Часть шара (ACC', рис. 154), отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью (CC'), называется **шаровым сегментом**. Круг сечения называется **основанием** сегмента, а отрезок Am радиуса, перпендикулярного к основанию, — высотой сегмента.

2) Часть шара, заключенная между двумя параллельными секущими плоскостями (CC' и DD'), называется **шаровым слоем.** Круги параллельных сечений называются основаниями слоя, а расстояние mn между ними — его **высотой.**

Оба эти тела можно рассматривать как происходящие от вращения вокруг диаметра AB части круга AmC или части $CmnD$.

149. Теорема. ***Объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота равна радиусу шара, уменьшенному на треть высоты сегмента,*** т. е.

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3}H\right),$$

где H есть высота сегмента, а R — радиус шара.

Объем шарового сегмента, получаемого вращением вокруг диаметра AD (рис. 155) части круга ACB, найдется, если из объема шарового сектора, получаемого вращением кругового сектора AOB, вычтем объем конуса, получаемого вращением $\triangle COB$. Первый из них равен $\frac{2}{3}\pi R^2 H$, а второй $\frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO$. Так как CB есть средняя пропорциональная между AC и CD, то $CB^2 = H(2R - H)$, поэтому

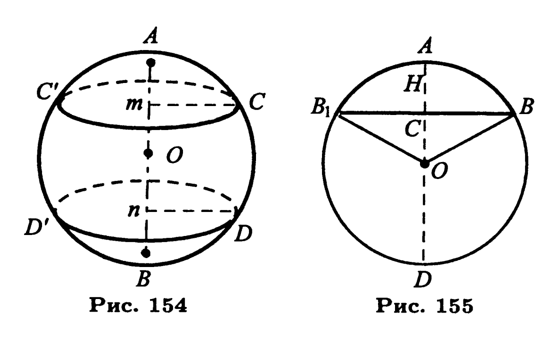


Рис. 154 Рис. 155

$$CB^2 \cdot CO = H(2R - H)(R - H) = 2R^2H - RH^2 - 2RH^2 + H^3 = \\ = 2R^2H - 3H^2R + H^3;$$

следовательно,

объем ABB_1 = объему $OBAB_1$ – объем OBB_1 =

$$= \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi CB^2 \cdot CO = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{2}{3}\pi R^2 H + \pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi H^3 = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3}H\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Объем цилиндра, у которого высота вдвое более диаметра основания, равен $1\,м^2$. Вычислить его высоту.

2. Вычислить боковую поверхность и объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований равны 27 см и 18 см, а образующая равна 21 см.

3. На каком расстоянии от центра шара, радиус которого равен 2,425 м, следует провести секущую плоскость, чтобы отношение поверхности меньшего сегмента к боковой поверхности конуса, имеющего общее с сегментом основание, а вершину в центре шара, равнялось 7:4?

4. Найти объем тела, происходящего от вращения правильного шестиугольника со стороной a вокруг одной из его сторон.

5, Вычислить радиус шара, описанного около куба, ребро которого равно 1 м.

6. Вычислить объем тела, происходящего от вращения правильного треугольника со стороной a вокруг оси, проходящей через его вершину и параллельной противоположной стороне.

7. Дан равносторонний $\triangle ABC$ со стороной a; на AC строят квадрат $BCDE$, располагая его в противоположную сторону от треугольника. Вычислить объем тела, происходящего от вращения пятиугольника $ABEDC$ вокруг стороны AB.

8. Дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AM, перпендикулярную к диагонали AC, и вращают квадрат вокруг AM. Вычислить поверхность, образуемую контуром квадрата, и объем, образуемый площадью квадрата.

9. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a. Через вершину A проводят прямую AM, перпендикулярную к радиусу OA, и вращают шестиугольник вокруг AM. Вычислить поверхность, образуемую контуром, и объем, образуемый площадью правильного шестиугольника.

10. В шаре, радиус которого равен 2, просверлено цилиндрическое отверстие вдоль его диаметра. Вычислить объем оставшейся части, если радиус цилиндрического отверстия равен 1.

11. Вычислить объем шара, который, будучи вложен в коническую воронку с радиусом основания $r = 5$ см и с образующей $l = 13$ см, касается основания воронки.

12. Около круга радиуса r описан равносторонний треугольник. Найти отношение объемов тел, которые производятся вращением круга и площади треугольника вокруг высоты треугольника.

13. В цилиндрический сосуд, у которого диаметр основания равен 6 см, а высота 36 см, налита вода до половины высоты сосуда. На сколько поднимается уровень воды в сосуде, если в него погрузить шар диаметром 5 см.

14. Железный пустой шар, внешний радиус которого равен 0,154 м, плавает в воде, погружаясь в нее наполовину. Вычислить толщину оболочки этого шара, зная, что удельный вес железа равен 7,7.

15. Диаметр Марса составляет половину земного. Во сколько раз поверхность и объем Марса меньше, чем соответственные величины для Земли?

16. Диаметр Юпитера в 11 раз больше земного. Во сколько раз Юпитер превышает Марс по поверхности и объему?

ДОПОЛНЕНИЕ

ОБ АКСИОМАХ ГЕОМЕТРИИ

1. Геометрия среди других областей математики (алгебра, арифметика) выделяется одной, только ей присущей особенностью. Эта особенность состоит в том, что те теоремы и свойства фигур, которые изучаются в геометрии, не только устанавливаются путем ряда рассуждений, не во многих случаях могут служить объектом непосредственного созерцания; справедливость этих свойств не только доказывается, но и подтверждается непосредственным зрительным впечатлением. Так, равенство углов при основании равнобедренного треугольника и многие другие свойства фигур можно непосредственно созерцать.

Наглядность геометрических объектов помогает обнаруживать и угадывать многие геометрические факты прежде, чем они будут точно доказаны. У древних египтян (за 2000 лет до нашей эры) главным способом изучения тех или иных свойств геометрических фигур служило их непосредственное созерцание. Но такой способ мог быть пригоден лишь для установления простейших геометрических фактов; с такими именно фактами и имели дело египтяне, которые пользовались геометрией для узкопрактических целей. Но уже простое расширение и усложнение практических задач привело к необходимости изучать свойства все более сложных геометрических фигур, а для этого уже недостаточно было простого созерцания чертежа; появилась необходимость применять все более сложные формы рассуждений.

Кроме того, сама наглядность чертежа в применении к более сложным геометрическим фигурам часто весьма обманчива и приводит иногда к неверным заключениям.

Можно привести много примеров, когда общий вид чертежа подсказывает неверное заключение о взаимном расположении и свойствах изображенных на нем фигур. На этом основано много геометрических парадоксов, приводить которые мы здесь не будем.

Древние греки, воспринявшие геометрическую науку от египтян, обобщили отдельные факты, известные египтянам, и выработали опре-

деленные формы рассуждений, при помощи которых они обнаруживали новые геометрические факты. Приблизительно за 300 лет до начала нашей эры греческий геометр Евклид в ряде своих книг, носивших общее название «Начала», дал первое научное обоснование геометрии.

Он постарался в достаточно отчетливых терминах выразить словами те общие представления о простейших геометрических образах — точках, линиях, поверхностях и о взаимоотношениях между ними, — которые считались до того времени само собой понятными. Базируясь на этом, он дал полное, логически строгое построение геометрии по форме, в высшей степени совершенное и с точки зрения современной науки.

Он прежде всего попытался дать точные определения основных геометрических понятий: точки, линии, в частности прямой линии, поверхности, в частности плоскости и геометрического тела. Приведем данные им определения:

1. *Точка есть то, что не имеет частей.*

2. *Линия есть длина без ширины.*

3. *Границы линии суть точки.*

4. *Прямая линия есть та, которая одинаково расположена относительно всех своих точек.*

5. *Поверхность есть то, что имеет длину и ширину.*

6. *Границы поверхности суть линии.*

7. *Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.*

8. *Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.*

9. *Границы тела суть поверхности.*

Целью этих определений было достигнуть того, чтобы термины «точка», «прямая» и т. д. не только вызывали определенное зрительное представление, но одновременно с тем определяли некоторое понятие, опираясь на которое можно было бы делать дальнейшие логические выводы. И хотя эти определения несовершенны с точки зрения современной науки, но они вполне соответствовали тогдашнему состоянию научной мысли и являлись первым шагом к переходу от образов к понятиям. Они послужили отправным пунктом всех последующих работ по геометрии и определили собой пути ее дальнейшего развития.

Все истины, которые устанавливаются в геометрии, Евклид разделил на три вида: постулаты, аксиомы и теоремы. К первым двум

видам*) были отнесены простейшие истины, которые не возбуждали никаких сомнений, были непосредственно очевидны и могли поэтому служить исходными предложениями, из которых логически выводились другие истины.

Третий вид предложений — теоремы — истины, которые должны доказываться, т. е. путем ряда рассуждений выводиться из двух первых видов истин. Приведем постулаты и аксиомы Евклида:

а) **Постулаты.** Требуется, чтобы:

1. *От каждой точки до каждой другой точки можно было провести одну прямую линию.*

2. *Ограниченную прямую можно было непрерывно продолжать по прямой.*

3. *Из любого центра можно было описать окружность любым радиусом.*

4. *Все прямые углы были равны между собой.*

5. *Две прямые, которые при пересечении с третьей образуют с ней по одну сторону внутренние углы, в сумме меньшие двух прямых, при продолжении в ту же сторону пересекались.*

б) **Аксиомы**:

1. *Равные одному и тому же равны между собой.*

2. *Если к равным прибавить поровну, то суммы будут равны.*

3. *Если от равных отнять поровну, то остатки будут равны.*

4. *Совмещающиеся друг с другом равны.*

5. *Целое больше своей части.*

Эти аксиомы и постулаты Евклида в течение долгого ряда последующий столетий служили базой, на которой строилась вся геометрия.

2. Уже ближайшие потомки Евклида обратили особое внимание на пятый из данных Евклидом постулатов. Он привлекал к себе внимание сложностью своей формулировки и далеко не полной очевидностью. Эта неочевидность вызвала стремление так или иначе доказать справедливость постулата, т. е. вывести его из остальных, не возбуждающих сомнений истин. Попытки дать доказательство пятого постулата продолжались в течение 2000 лет, но не привели и, как

*) Принципиальной разницы между теми и другими Евклид не указывает, но с постулатами он обычно связывает утверждение о возможности выполнить то или иное построение.

оказалось впоследствии, не могли привести к положительному результату. Удавалось лишь заменить постулат другим предложением, ему равносильным, но столь же неочевидным и не вытекавшим из остальных геометрических аксиом и постулатов.

Легко показать, что постулат Евклида равносилен утверждению, что в данной плоскости через каждую точку к каждой прямой можно провести единственную прямую, ей параллельную (т. е. не пересекающую данной). Действительно, если принять это положение как аксиому, то из теорем, доказанных в планиметрии, непосредственно вытекает постулат Евклида. Это предложение о единственности параллельной прямой и принимается обычно как аксиома вместо постулата Евклида (как это сделано в настоящей книге). Другим предложением, равносильным постулату Евклида, является теорема о сумме углов треугольника.

Усилия геометров в течение ряда веков были направлены на то, чтобы доказать или самый постулат Евклида, или предложение, ему равносильное. Приведем здесь для иллюстрации несколько таких доказательств.

Доказательство Прокла (V в. нашей эры). Возьмем на данной плоскости прямую a и точку A вне ее (рис. 156). Опустим из A перпендикуляр AB на прямую a и в точке A восставим перпендикуляр AC к прямой AB. Прямые a и AC не пересекаются, иначе из точки их пересечения было бы опущено на прямую AB два перпендикуляра. Пусть теперь через A проведена еще какая-либо прямая AD. Прокл доказывает, что она должна встретиться с прямой a. Вот его доказательство.

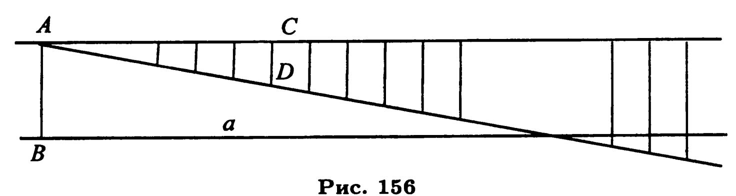


Рис. 156

Будем восставлять перпендикуляры к прямой AB и продолжать их до пересечения с прямой AD. По мере удаления основания перпендикуляра от точки A его длина будет расти, и при достаточном удалении от точки A она станет больше расстояния между параллельными прямыми a и AC. Соответствующие точки прямой AD окажутся, таким образом, лежащими по другую сторону прямой a, т. е. прямая AD перейдет с одной стороны a на другую. А это может случиться только, если она пересечет прямую a. В этом своем доказательстве Прокл опирается на то положение, что расстояние точек одной из двух параллельных прямых от другой не может беспредельно возрастать. Но это положение само есть некоторый постулат, равносильный постулату Евклида.

Приведем еще пример попытки доказательства теоремы о сумме углов треугольника без помощи свойств параллельных прямых. Это доказательство относится уже к XIX в. и принадлежит профессору Геттингенского университета Thibaut (Тибо).

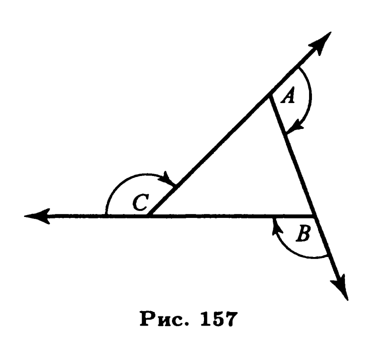


Рис. 157

Пусть дан $\triangle ABC$ (рис. 157). Продолжим сторону CA за точку A, сторону AB за точку B и сторону BC за точку C. Докажем, что образовавшиеся внешние углы составляют в сумме $4d$. Вращаем прямую AC около точки A на величину внешнего угла A. После этого поворота она совпадает с прямой AB. Вращаем далее эту прямую около точки B от ее нового положения на величину внешнего угла B; после поворота она совпадает с прямой BC. Вращаем теперь эту прямую около точки C от ее последнего положения на величину внешнего угла C. После этих трех поворотов прямая вернется в исходное положение. Следовательно, в общей сложности она повернется на полный угол, т. е. на $4d$, но три ее поворота состояли из поворотов на величины трех внешних углов треугольника. Следовательно, сумма этих внешних углов равна $4d$. Но сумма и внешних, и внутренних углов треугольника, очевидно, равна $6d$. Следовательно, сумма его внутренних углов равна $6d - 4d = 2d$.

В этом доказательстве Тибо производил три поворота прямой около р а з л и ч н ы х т о ч е к и молчаливо предполагал, что такое вращение равносильно полному повороту около о д н о г о центра, когда прямая описывает полный угол.

Такое предположение само составляет некоторое допущение. Подробное изучение этого допущения показывает, что оно равносильно постулату Евклида. Мы не будем приводить других попыток доказательства пятого постулата.

Несмотря на многочисленные неудачи получить строгое доказательство постулата Евклида, попытки его доказательства не прекращались, и причиной этого была полная убежденность геометров в невозможности обойтись без него при построении геометрии.

3. В первой половине XIX в. гениальный русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский высказал смелую мысль, что постулат Евклида не является логическим следствием остальных аксиом геометрии и потому не может быть доказан, и что принятие этого постулата не является необходимым для построения геометрии.

В подтверждение своей мысли он построил новую геометрию, в которой постулат Евклида был заменен другим предложением, а именно, что через данную точку в данной плоскости можно провести бесчисленное множество прямых, не пересекающих данной.

Предложения этой геометрии существенно отличались от теорем геометрии Эвклида. Так, сумма углов треугольника оказалась меньше двух прямых углов, к теоремам о равенстве треугольников присоединилась новая: «Треугольники равны, когда три угла одного равны трем углам другого». В этой геометрии, следовательно, не существует треугольников подобных и неравных между собой.

Первый доклад о созданной им новой геометрии Лобачевский сделал в 1826 г. Идеи Лобачевского были в высшей степени новыми и неожиданными. Несмотря на всю непривычность таких предложений новой геометрии, она имела такую же стройную и законченную форму, как и геометрия Евклида. Впоследствии ей было дано название неевклидовой геометрии. Одновременно с ее открытием возник вопрос: какая же геометрия имеет место в действительном материальном мире и какой геометрией следует пользоваться при решении проблемы прикладного знания — физики, астрономии и др.? Лобачевский пытался решить этот вопрос опытным путем — астрономическими наблюдениями.

Но решить этот вопрос столь простыми средствами оказалось невозможным. Дело в том, что наши пространственные восприятия не обладают абсолютной точностью и лишь приблизительно отражают пространственные отношения материального мира.

Геометрия Евклида выросла из наблюдений над материальным миром и потому с большой точностью отражает существующие в нем взаимоотношения, по крайней мере в их простейших проявлениях. В силу этого опыты Лобачевского не дали исчерпывающего ответа на поставленный вопрос: они не обнаружили заметных отклонений от того, что давала геометрия Евклида, но и не установили абсолютного совпадения предложений этой геометрии с пространственными взаимоотношениями материального мира.

Открытие неевклидовой геометрии произвело глубокие изменения в сознании геометров. Самый факт существования стройной и непротиворечивой неевклидовой геометрии подрывал вековое доверие к «наглядности» и «очевидности», руководившим мыслью древних геометров. Многовековой анализ пятого постулата расшатал устои первичных геометрических представлений, на которых покоилась геометрия Евклида. Он вскрыл глубокие зависимости между отдельными, казавшимися далекими одни от других геометрическими фактами и представил в новом свете пространственные взаимоотношения материального Мира. Поэтому система аксиом и определений Евклида как база для построения геометрии стала уже недостаточной. В свете новых идей его определения и аксиомы обнаружили недостаточную полноту и не могли уже отвечать возросшим требованиям научной строгости.

Такое, например, определение, как «линия есть длина без ширины», не могло уже удовлетворить геометров, так как в их сознании сами понятия длины и ширины уже утратили тот характер абсолютной

ясности и первоначальности, который они имели во времена Евклида. Для геометров нового времени многие определения Евклида не имели силы без некоторых дополнительных предположений, которые явно не высказывались, но молчаливо и незаметно принимались сознанием древних геометров. Иначе трудно объяснить, почему, например, определение 4 нельзя применить к окружности и определение 7 — к поверхности круглого цилиндра или конуса.

Требование большей полноты геометрических определений и аксиом привело к тому, что в конце XIX в. была поставлена задача общего пересмотра и уточнений всей аксиоматической базы геометрии. Эти работы привели к созданию новой аксиоматики геометрии, вполне отвечающей современным требованиям математической строгости.

Ниже мы даем краткое изложение современного состояния этого вопроса.

4. Прежде всего поставим вопрос об определении основных геометрических образов: точка, прямая линия и плоскость. Заметим, что определить какое-нибудь понятие — значит выразить его через понятия, ранее уже установленные. Если же искать определение простейших понятий, то дело неизбежно сведется лишь к замене одного термина другим, в свою очередь требующим определения. Так и было у Евклида, который понятие «линии» определил через понятие «длины» или «границы», а эти последние не определял.

Поэтому можно с самого начала не искать определения простейших геометрических понятий, а принять их за исходные, которые нельзя уже выразить через понятия более простые. «Точка», «прямая» и плоскость» и принимаются за такие первичные, неопределимые геометрические понятия. По отношению к ним устанавливается целая система основных положений «аксиом», принимаемых за исходные недоказуемые положения. По существу эти аксиомы представляют собой лишь целесообразные абстракции пространственных взаимоотношений материального мира.

Мы приведем здесь ту систему аксиом, которая была дана немецким математиком Гильбертом. В этой системе все аксиомы геометрии разделяются на 5 групп.

Первая группа аксиом — **«аксиомы соединения»**. Аксиомы этой группы имеют целью установить те взаимоотношения между понятиями точка, прямая и плоскость, которые обычно характеризуются словами: «прямая проходит через точку», «точка лежит на прямой или на плоскости» и т. п. Эта группа состоит из следующих аксиом:

1. *Две точки определяют единственную проходящую через них прямую.*

2. *На каждой прямой лежит не менее двух точек; существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.*

3. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. В каждой плоскости лежит по крайней мере одна точка.*

4. *Если две точки прямой линии лежат в данной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.*

5. *Если две плоскости имеют одну общую точку, то они имеют и еще по крайней мере одну общую точку.*

6. *Существует по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

При первом взгляде на эти аксиомы некоторые из них могут показаться или недостаточными, или вообще ненужными. Так, аксиома 2 как бы противоречит обычному представлению о прямой, на которой мы мыслим бесчисленное множество точек. Но не следует забывать, что точки и прямые введены у нас как первичные, не зависящие одно от другого понятия. Они могут существовать раздельно. Поэтому, когда мы говорили, что точка лежит на прямой или что прямая проходит через точку, мы приписывали точке и прямой способность находиться между собой в некотором взаимоотношении. Чтобы яснее представить себе такое раздельное существование точек, прямых и плоскостей и взаимоотношения между ними, будем их представлять себе в виде конкретных физических предметов. Точки будем представлять себе в виде горошин какой-нибудь определенной величины. Эти горошины будем предполагать шарообразной формы и достаточно мягкими (например, разбухшими в воде), чтобы их можно было прокалывать тонкими иглами и резать на части. Прямые линии будем представлять в виде очень тонких стальных иголок, а плоскости — в виде столь же тонких пластинок. Сначала эти пластинки, иглы и горошины представляем себе ничем не связанными и даже находящимися в разных местах: в одном месте — кучка гороха, в другом — груда стальных игл, в третьем — пачка сложенных пластинок. Начнем теперь подчинять их тем условиям, которые содержатся в наших аксиомах. Мы будем считать, что точка лежит на прямой, если игла прокалывает горошину или хотя бы частично входит в нее. Будем считать, что точка лежит на плоскости, если тонкая пластинка режет горошину пополам или лишь надрезает горошину. Наконец, будем считать, что прямая лежит на плоскости, если тонкая игла служит краем пластинки, т. е. если игла прилегает на всем протяжении к краю пластинки, не выдаваясь от нее ни в ту, ни в другую сторону. Что означают при этих условиях аксиомы? Они требуют, чтобы наши горошины, иглы и пластинки приняли такое расположение в пространстве, чтобы каждые две горошины были проколоты по крайней мере одной иглой или нанизаны на одну иглу

(аксиома 1); каждая игла прокалывала не менее двух горошин (аксиома 2); каждые три горошины были разрезаны (или надрезаны) одной пластинкой и чтобы каждая пластинка надрезала по крайней мере одну горошину (аксиома 3); если две горошины, нанизанные на одну иглу, надрезать некоторой пластинкой, то и все другие горошины, которые могут оказаться нанизанными на ту же иглу, надрезывали бы той же пластинкой (аксиома 4); если две пластинки надрезают одну, и ту же горошину, то они надрезали бы по крайней мере еще одну горошину (аксиома 5); имеются по крайней мере четыре горошины, не разрезанные (и не надрезанные) одной и той же пластинкой (аксиома 6). Таким условиям должны удовлетворять наши горошины, иглы и пластинки. И такую комбинацию горошин, игл и пластинок нетрудно построить. Действительно, отделим от пачки пластинок четыре пластинки. Обрежем их по краям так, чтобы каждая из них приняла форму равностороннего треугольника определенного размера. Из груды игл возьмем 6 штук и обломаем их концы так, чтобы все иглы стали одной длины, равной стороне треугольной пластинки. Возьмем далее 4 горошины и составим следующую фигуру: из 4 пластинок составим правильный тетраэдр; в пазы между прилегающими краями пластинок вложим иглы, а на вершинах тетраэдра поместим горошины так, чтобы пластинки их надрезали, а иглы прокалывали. Для этой совокупности горошин, игл и пластинок удовлетворяются все поставленные выше требования, т. е. все наши аксиомы.

Из этого примера видно,что множество точек, прямых и плоскостей, удовлетворяющих аксиомам 1-й группы, может быть конечным. В нашем примере мы имеем всего 4 точки, 6 прямых и 4 плоскости.

Вторая группа аксиом — **«аксиомы порядка»** — имеет целью в отчетливой форме высказать те положения, на которые мы опираемся, когда говорим о том или ином порядке расположения точек на прямой и на плоскости. Главным понятием здесь является расположение на прямой одной точки между двумя другими. Логическое содержание этого понятия и устанавливается аксиомами этой группы. Она состоит из следующих аксиом:

1. *Если B лежит между A и C, то A, B и C — различные точки прямой, и B лежит также между C и A.*

2. *При данных двух точках A и B на прямой линии на ней существует по крайней мере одна точка C такая, что B лежит между A и C.*

3. *Из трех данных точек на прямой не более чем одна лежит между двумя другими.*

4. *Если в данной плоскости даны треугольник ABC и какая-либо прямая a, не проходящая ни через одну из его вершин и*

пересекающая отрезок AB, то она непременно пересечет или отрезок BC, или отрезок AC.

Эти аксиомы предъявляют к нашим точкам, прямым и плоскостям требования, которым они должны удовлетворять. Та совокупность граней, ребер и вершин тетраэдра, которая удовлетворяла аксиомам 1-й группы, уже не удовлетворяет нашим аксиомам. В самом деле, на каждой нашей игле были нанизаны лишь две горошины, между тем как вторая аксиома 2-й группы требует, чтобы на прямой было не менее трех точек. А более подробный анализ показывает, что на каждой прямой должно лежать бесчисленное множество точек и что аксиомам 2-й и 1-й групп, вместе взятым, может удовлетворять лишь бесконечное множество точек, прямых и плоскостей*) .

Третья группа аксиом — **«аксиомы конгруэнтности»** — имеет целью установить основные предложения о равенстве отрезков и углов.

Она содержит следующие аксиомы:

1. *На любой прямой от любой ее точки можно отложить отрезок, равный данному.*

2. *Два отрезка, равные третьему, равны между собой.*

3. *Пусть A, B, C — точки одной прямой и A_1, B_1, C_1 — также точки одной прямой и $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$; если отрезки AB и BC, а также A_1B_1 и B_1C_1 не имеют общих точек, то $AC = A_1C_1$.*

4. *От любой точки данной прямой по данную ее сторону можно построить один и только один угол, равный данному; каждый угол равен самому себе.*

5. *Если в двух треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.*

Следует обратить внимание на последнюю аксиому.

В учебниках геометрии эта аксиома есть следствие второго случая равенства треугольников. Но само это равенство треугольников доказывается путем наложения и, следовательно, предполагает возможность перемещения фигур; такое перемещение само составляет некоторую новую аксиому, и притом не включенную в нашу систему. Поэтому предложение 5 и приходится принимать как новую аксиому. Пользование ею заменяет применение в геометрии метода перемещения фигур.

Четвертую группу аксиом составляет одна — **«аксиома о параллельные прямых»**. При этом возможность существования параллельных прямых доказывается без помощи новых аксиом. А потому

---

*) Доказательство этого факта выходит из рамок настоящей книги

Рис. 158

аксиома требует лишь единственности параллельной прямой: *через данную точку в данной плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данной.* Об этой аксиоме мы уже говорили выше. Наконец, пятую и последнюю группу аксиом составляют **«аксиомы непрерывности»**. Эта группа состоит из двух аксиом:

1. **Аксиома Архимеда.** *Если AB и CD — два произвольных отрезка, то на прямой AB существует ряд точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ таких, что $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ и что B будет лежать между A_{n-1} и A_n* (рис. 158).

2. **Аксиома линейной полноты.** *Точки прямой линии образуют систему точек, которую нельзя дополнить новыми точками, которые можно было бы считать принадлежащими той же прямой, без нарушения ранее установленных аксиом**) .

Содержание первой из этих аксиом — аксиомы Архимеда — достаточно ясно: аксиома требует, чтобы каждой точки прямой, как бы далеко она ни была намечена, можно было достигать с помощью конечного числа равных шагов и, следовательно, чтобы можно было измерить расстояние от данной точки до любой точки прямой. Поэтому эту аксиому и называют иногда аксиомой измерения.

Посмотрим, в чем сущность аксиомы линейной полноты. Учащиеся знают из курса алгебры, что если на числовой оси построить все точки с рациональными абсциссами, то этим не исчерпаются все точки прямой; прямая не будет сплошь заполнена этими точками. Так, точки с иррациональными абсциссами еще не будут построены.

Когда вводятся алгебраические иррациональные числа в виде корней всевозможных степеней из рациональных чисел и корней алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами и строятся соответствующие им точки на числовой оси, то числовая ось обогащается новыми точками с иррациональными абсциссами. Но на числовой оси все еще остаются пустые места, где еще могут быть вставлены новые точки. Так, точки с абсциссами π, $\pi/2$, $\pi/3$, $\sqrt{\pi}$ и т. п. не будут нанесены на числовой оси. Ось заполнится вся лишь после того, как будут введены все действительные числа. После этого на ней нельзя будет вставить новую точку. На ней уже не останется пустых мест. Аксиома полноты требует, чтобы именно этим свойством обладала геометрическая прямая: чтобы на ней не осталось ни одного пустого места, куда можно было вставить новую точку.

---

*) Точнее: без нарушения первых двух аксиом соединения, аксиом порядка, первой аксиомы конгруэнтности и аксиомы Архимеда.

Принятие этой аксиомы позволяет считать, что каждому действительному числу соответствует определенная точка на прямой при выбранном начале отсчета абсцисс и, обратно, каждой точке прямой соответствует определенное действительное число.

Таков перечень всех аксиом, на которых базируется в настоящее время евклидова геометрия.

5. Если теперь провести анализ всего курса элементарной геометрии, то можно будет заметить, что при всех проводимых доказательствах не приходилось опираться ни на какие иные исходные положения, кроме тех, которые заключены в данной выше системе аксиом. Одни из этих положений, как аксиома о параллельных и некоторые из аксиом соединения, были высказаны явно, другие молчаливо считались как само собой разумеющиеся. Аксиомы конгруэнтности были заменены предложением о возможности свободного перемещения фигур в пространстве. Но само это предложение, как показывает более подробный его анализ, является сложной аксиомой, равносильной всей совокупности аксиом конгруэнтности.

ТАБЛИЦА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
через каждый градус углов от 0° до 90°

Градусы	Синусы	Косинусы	Тангенсы	Котангенсы	Градусы
0	0,00000	1,00000	0,00000	∞	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63688	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27685	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
	Косинусы	Синусы	Котангенсы	Тангенсы	

Градусы	Синусы	Косинусы	Тангенсы	Котангенсы	Градусы
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07239	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
	Косинусы	Синусы	Котангенсы	Тангенсы	

Некоторые числа, часто употребляемые при решении задач

$$\pi \approx 3{,}1416 \quad \left(\text{около } 3\frac{1}{7}\right); \quad \frac{\pi}{180} \approx 0{,}01745; \quad \sqrt{2} \approx 1{,}4142;$$

$$\sqrt{5} \approx 2{,}2361; \quad \frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183; \quad \frac{180}{\pi}(\text{радиан}) \approx 57^\circ 17' 44'';$$

$$\sqrt{3} \approx 1{,}73205; \quad \sqrt{6} \approx 2{,}4495.$$